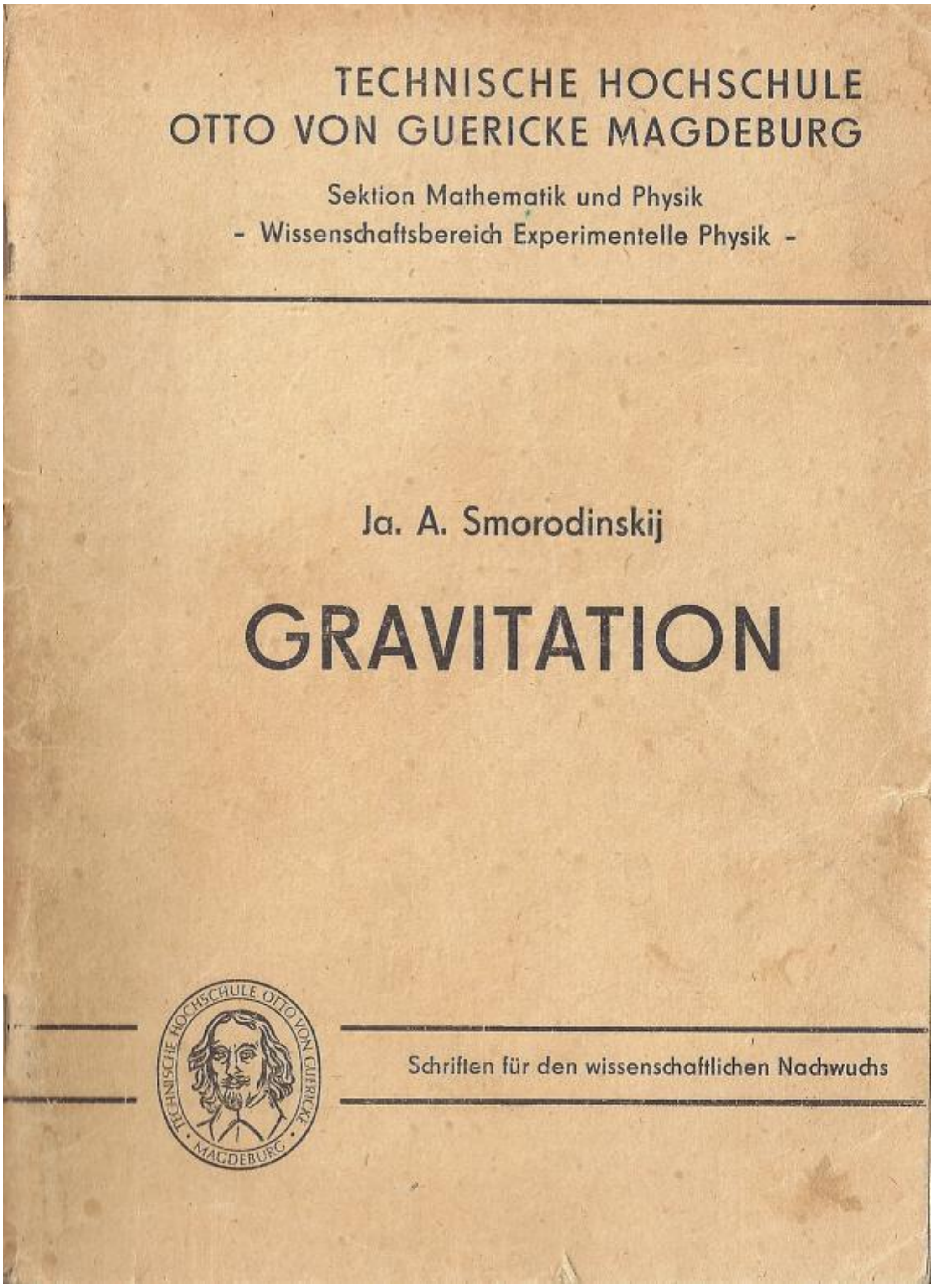

Yakov Abramovich Smorodinsky - Тяготение (Tjagotenie- Gravitation).
Moskva „Зна́ние“ (Znanie) 1975

Übersetzung aus dem Russischen:
Prof. Dr. so. H. Oehler, Dr. rer. nat. J. Lauckner, Dr. rer. nat. L. Niederhoff, Dr. rer. nat. H. Röll

Abschrift und erste Nachbearbeitung von:
Michael Haugk, Dez. 2014

Inhalt

1 Legenden und Hypothesen

Der Mensch liebt Legenden. Jeder kennt die Geschichte, wie Newton ein Apfel auf den Kopf fiel. So jedenfalls wird die Entdeckung des Gesetzes der weltweiten Schwerkraft erzählt. An der Geschichte ist alles glaubhaft, es muss nur gefragt werden: Was entdeckte Newton? Dass ein Apfel auf die Erde herabfällt, wussten alle. Aristoteles hatte gelehrt, dass es 3 Arten der Bewegung gibt: Schwere Körper fallen nach unten, leichte (Rauch) steigen nach oben und Himmelskörper (ideale Körper) bewegen sich auf in sich geschlossenen Bahnen. Selbst die Tatsache, dass der Apfel von der Erde angezogen wird, war nicht neu.

1538 schrieb Frascator, dass sich alle Körper gegenseitig anziehen. Gilbert und Becon bezeichneten die Erde als Magnet. Kepler, als junger Zeitgenosse Galileis, sprach von der Einwirkung der Sonne auf die Erde und erklärte richtig die Ursachen von Ebbe und Flut.

Sicherlich gab es noch andere Gelehrte, die verstanden, dass zwischen den Körpern anziehende Kräfte wirken. Diese Idee hing, wie man so sagt, in der Luft, und zu der Zeit, als Newton der Königlichen Gesellschaft in London seine umfangreiche Handschrift „Mathematische Grundlagen der Naturphilosophie“ (28.4.1686) vorlegte, wurde seine Priorität von mehreren Engländern bestritten. Sie alle wussten, dass die Anziehungskräfte umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes sind und dass die Bewegung der Planeten damit erklärt werden kann.

Newton hielt sich auch sehr mit der Veröffentlichung dieses Gesetzes zurück, das er schon 1666 entdeckt hatte, als er eine Theorie aufzustellen versuchte, um die Bewegung des Mondes zu erklären. Dieser Versuch war jedoch nicht erfolgreich, weil Newton für die Berechnungen den damals bekannten, aber falschen Radius der Erde zugrunde gelegt hatte.

In den Arbeiten Newtons stand das Gesetz der weltweiten Gravitation als allgemeinstes Grundgesetz des Weltalls, und auf dieser Grundlage wurde eine exakte mathematische Theorie aufgebaut, die in ihrer Vollkommenheit bei weitem die oft ungenauen Schlussfolgerungen seiner Zeitgenossen überragte. Durch Newton begann sich eine neue Wissenschaft zu entwickeln, die Himmelsmechanik. Die Bewegung des Mondes, der Planeten und später der Sterne, Galaxien und letztlich des Weltalls selbst wurde dem Menschen verständlich.

Zunächst wurde festgestellt, dass sich die Gesetze des Kosmos nicht von denen auf der Erde unterscheiden. Im Unterschied zu seinen Zeitgenossen betrachtete Newton die Probleme als Mathematiker. Er konnte sich nicht mit allgemeinen Formulierungen der Gravitation zufriedengeben, er forderte eine gute Übereinstimmung von Theorie und Experiment. Newton schrieb die Gleichungen der Mechanik nieder; bis dahin war es überhaupt nicht möglich gewesen, irgendeine Aufgabe genau zu lösen. Galilei hatte die Fallgesetze der Körper mit Hilfe von Progressionen erklärt, Hooke wusste überhaupt nicht, wie das Abstandsgesetz zu prüfen ist. Zu Jener Zeit konnte niemand begreifen, was unter Kraft zu verstehen ist.

All das änderte sich, nachdem Newton seine Gleichungen niedergeschrieben hatte. Es zeigte sich nun, dass die Kräfte mit der Beschleunigung verknüpft waren. Mit Hilfe der von Newton erarbeiteten mathematischen Analyse konnten die Gleichungen gelöst werden. Die Zeitgenossen Newtons konnten des noch nicht, ja sie konnten die Gleichungen nicht einmal niederschreiben. Newton muss demzufolge als Begründer der theoretischen Physik betrachtet werden, er war der erste

Naturforscher, der von der qualitativen Beschreibung von Erscheinungen überging zu einer strengen mathematischen Theorie. Seitdem kann eine Theorie nur dann als richtig anerkannt werden, wenn sie die durch Experimente erhaltenen Messwerte erklären kann.

Wenn wir in der heutigen Zeit von der Genauigkeit der Quantenelektrodynamik begeistert sind, die selbst die feinsten Details der Atomspektren zu erklären vermag, wissen wir, dass sich darin jener Geist der theoretischen Physik widerspiegelt, der vom Genie Newtons geprägt wurde.

Die Aufgabe Newtons war nicht die leichteste. Er benötigte einige Jahre, um zu verstehen, wie das Gesetz der Schwerkraft auf Erde und Mond, die nicht als materielle Punkte betrachtet werden konnten, angewendet werden musste. Die Anwendung auf die Bewegung des Mondes gelang ihm erst, nachdem er bewiesen hatte, dass ein Körper mit einer kugelsymmetrischen Massenverteilung andere Körper wie ein materieller Punkt gleicher Masse anzieht.

In der Legende über den herabfallenden Apfel spiegelt sich also eine vieljährige gigantische Arbeit wider, durch welche aus einer Hypothese eine physikalische Theorie wurde.

Nach Newton blieb der zweite Teil des Problems noch ungelöst. Die Formeln und Gleichungen konnten nicht die Natur der Schwerkraft erklären. Newton selbst sagte zu diesem Problem: „Die Ursache dieser Eigenschaften der Schwerkraft kann ich bisher nicht aus den Erscheinungen herleiten. Ja nicht einmal eine Hypothese kann ich ausdenken. Alles, was sich nicht aus den Erscheinungen herleiten lässt, muss als Hypothese bezeichnet werden. Aber für metaphysische, physikalische, mechanische Hypothesen mit verborgenen Eigenschaften gibt es keinen Platz in der experimentellen Philosophie.“

Dieses Programm bestimmte die Entwicklung der Physik für die folgenden 200 Jahre. Man nahm an, dass die Erklärung einer Erscheinung darin bestehen müsse, für sie ein nicht zu kompliziertes mechanisches Modell zu finden.

So wurde zur Erklärung der Schwerkraft irgendein Medium, der sogenannte Äther, erdacht, mittels dessen sich die Schwerkraft ausbreiten sollte. Um zu begreifen, wie Newton darüber dachte, ist es am besten, wenn man seine eigenen Worte liest, mit denen er die schon zitierte Handschrift beendete: „Jetzt wäre es nötig, irgendeinen sehr feinen Äther hinzuzufügen, der alle festen Körper durchdringt und in ihnen enthalten ist, unter dessen Wirkungen und Kräften sich die Teilchen des Körpers bei äußerst geringen Abständen gegenseitig anziehen, um sich bei Berührung aneinander zu kuppeln, elektrisierte Körper wirken in großen Abständen, benachbarte kleine Körper werden sowohl angezogen als auch abgestoßen, Licht wird ausgesendet, reflektiert, gebrochen, abgelenkt und erhitzt die Körper, regt jede Empfindung an, die die Gliedmaßen von Lebewesen zwingt, sich nach Wunsch zu bewegen, indem sie durch Schwingungen dieses Äthers von den äußeren Sinnesorganen dem Gehirn und vom Gehirn den Muskeln übertragen wird. Aber das kann nicht in Kürze auseinandergesetzt werden, außerdem gibt es keinen genügenden Vorrat an experimentellen Werten, mit denen die Gesetze der Wirkung dieses Äthers genau bestimmt und gezeigt werden könnten.“

So dachte Newton über ein einheitliches Weltbild. Wie viel blieb noch zu tun: Die Trennung unterschiedlicher Erscheinungen und ihre Klassifizierung, damit man mit dem Aufbau einer Theorie beginnen konnte. Newton stand am Anfang. Auch wir wissen heute noch nicht, wie weit der Weg zur Wahrheit noch ist.

2 Fernwirkung

Eine der schwierigsten Ideen, gegen die sich selbst die angesehensten Naturforscher ereiferten, war die Idee der Fernwirkung. Wenn ein Körper mit einem anderen zusammenstößt, dann ist der Mechanismus der Impulsübertragung offensichtlich und verständlich. Die sich drehende Erde reißt die Luft mit sich und die Luft ihrerseits führt die in ihr fliegenden Vögel mit sich mit. Es schien so, als ob ein Körper nicht dort wirken könnte, wo er sich nicht befindet. Das war eins der offensichtlichen Prinzipien der Philosophie.

Die Fernwirkung ähnelte irgendwie der Idee der Astrologen über die Wirkung der Sterne auf den Menschen. Die Wissenschaftler strebten mit allen Kräften danach, dieses Hirngespinst aus der Physik zu verbannen. Sogar Newton versuchte die Wirkung der Schwerkraft mit feinsten Ätherteilchen zu erklären, welche die Poren der Körper ausfüllen. Die Theorien eines elastischen Äthers vermehrten und komplizierten sich. Bis zu Ende des 19. Jahrhunderts galt die Aufstellung einer Theorie des Äthers als eine das Weltbild vervollkommnende Notwendigkeit.

Man muss sich über Johannes Kepler wundern, der gegen die Meinung aller bekräftigte, dass die Sonne auf die Planeten genauso einwirkt, wie die Erde auf den Mond. Vielleicht hat die Beschäftigung mit der Astrologie ihm geholfen, sich über die Tradition hinwegzusetzen. Er vermochte mit wunderbarem Spürsinn wertvolle Wahrheiten aus unwahrscheinlichen Lehren herauszuholen. Anfange sprach Kepler von einer Seele der Sonne, die auf die Seelen der Planeten einwirkt. Solche Worte brauchen ihm nicht angekreidet zu werden, da die Sprache der Wissenschaft zu seiner Zeit noch sehr ärmlich war. Trotzdem ersetzt Kepler in der Folgezeit die Seele durch den Begriff der Kraft.

Ihm war klar, dass die Gezeiten des Meeres ihre Herkunft der Anziehung durch den Mond verdanken. Heute ist es uns unverständlich, warum Kepler das Gesetz der Kraftwirkung nicht finden konnte, obwohl er auch die Wirkung der Sonne mit der Ausbreitung von Licht einer punktförmigen Quelle verglich (die Intensität des Lichtes nimmt mit dem Quadrat des Abstandes ab). Sehr wahrscheinlich ist es, dass Kepler nicht sehr gut verstanden hat, was eine Kraft ist, indem er beispielsweise annahm, dass die Kraft mit der Bahnebene verknüpft ist. Trotzdem war er der erste, der ernsthaft von einer Fernwirkung sprach.

3 Ausbreitungsgeschwindigkeit der Gravitation

Die Idee der Fernwirkung von Körpern musste anerkannt werden, zumindest als Arbeitshypothese. Ohne diese war es unmöglich, die Bewegungsgesetze der Planeten zu verstehen. Alle nahmen an, dass irgendeine Erklärung für die Schwerkraft gefunden werden müsste, das es nötig wäre, diese Kräfte mit irgendwelchen Eigenschaften der Natur zu verbinden, die man mit den Gesetzen der Mechanik hätte beschreiben können, dass es für die Übertragung von Wechselwirkungen einen Äther geben musste oder Teilchen, welche die Körper mit einem Hagel von Stößen überschütten. Das störte nicht die Annahme der Hypothese Newtons und ermöglichte ein Weitergehen, ohne sich bei der Begründung aufzuhalten. Die Kraft, die nach dem Gesetz der weltweiten Gravitation gegeben ist, wurde in die Gleichungen Newtons eingesetzt und daraus entwickelte sich die Himmelsmechanik, die Ende des 19. Jahrhunderts eine erstaunliche Vollkommenheit erlangte.

Aber noch eine Frage gab den Physikern keine Ruhe. Falls sich die Schwerkraft mittels eines Äthers ausbreitet, wie groß ist dann die Geschwindigkeit dieser Ausbreitung der Gravitation? Es wurde versucht, diese Geschwindigkeit abzuschätzen, indem die bei der Beobachtung von Planeten erhaltenen Daten verwendet wurden. Die erste Abschätzung führte noch Laplace durch. Seine Überlegungen waren sehr einfach. Falls die Geschwindigkeit nicht unendlich ist, dann muss offensichtlich in das Gravitationsgesetz nicht der Abstand zwischen den Körpern im gegebenen Zeitpunkt eingesetzt werden, sondern der Abstand, der etwas früher vorhanden war, nämlich in dem vergangenen Zeitpunkt, der zum gegebenen Zeitpunkt um einen Betrag zurück1iegt, der erforderlich ist für die Ausbreitung der Gravitation.

Unter Verwendung dieser Idee konnte man die Kraft berechnen, mit der der Jupiter auf die Erde einwirkt und mit der er ihre Bewegung störte. Das Ergebnis war unerwartet. Aus den Beobachtungen folgte, dass sogar bei einer Geschwindigkeit der Gravitationsausbreitung vom 10 Mill.-fachen der Lichtgeschwindigkeit die Störung hätte entdeckt werden können. Somit musste man annehmen, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit um ein Gewaltiges die Lichtgeschwindigkeit übersteigt.

Dieser Fehler hielt sich bis Ende des 19. Jahrhunderts, obwohl zu dieser Zeit die Physiker schon den Verzögerungseffekt aus der Elektrodynamik kannten und wussten, dass solch ein Effekt in der Elektrodynamik zu einer weitaus geringeren Korrektur führt. Der Fehler von Laplace bestand darin, dass sich die Korrektur nicht der Geschwindigkeit, sondern dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional erwies.

Nach der Entdeckung des speziellen Relativitätsprinzips begriff Poincaré, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Gravitation gleich der Lichtgeschwindigkeit sein muss.

4 Genauigkeit des Gravitationsgesetzes

Am Ende des vorigen Jahrhunderts, als die Himmelsmechanik eine große Vollkommenheit erreicht hatte, konnte man auch darüber nachdenken, wie genau des Gravitationsgesetz ist, in welchem Grade man überzeugt sein konnte, dass sich die Kräfte der Wechselwirkung umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes ändern. Zu dieser Zeit wusste man schon, dass eine Abweichung von 43" (im Jahrhundert) zwischen der wirklichen und der berechneten Bewegung des Merkur infolge Störung dieser Bewegung durch die übrigen Planeten existierte. Um diese Abweichung erklären zu können, war die Annahme erforderlich, dass der Exponent im Gravitationsgesetz nicht genau 2 beträgt, sondern 2,00000016.

Laplace dachte, dass die Schwerkraft im interplanetaren Medium absorbiert wird und das wirkliche Gravitationsgesetz folgende Form hat:

$$F = \gamma \, \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot e^{-\lambda r} \quad .$$

Falls die Perihelbewegung des Merkur mit einer derartigen Änderung des Gesetzes erklärt wird, dann muss für $\lambda = 0{,}00000038\ \mathrm{cm}^{-1}$ (Berechnung durch Seeliger 1896) eingesetzt werden.

Damit war zur Jahrhundertwende alles bekannt, was über die Kräfte bekannt sein müsste, nämlich die Formel und ihre Genauigkeit.

Trotzdem konnte nicht verstanden werden, woher das Gesetz selbst herrührte. Alle Versuche, es aus schon bekannten physikalischen Gesetzen abzuleiten, erlitten Schiffbruch. Man könnte sogar nicht nur von Schiffbruch sprechen, sondern einfach sagen, dass sich alle mechanischen Modelle als sehr ungeeignet erwiesen und praktisch auch nicht überprüfbar waren.

Heute verstehen wir zurückblickend, dass es unmöglich war, eine richtige Theorie der Gravitation aufzustellen, wenn man auf dem Weg der Entwicklung der Physik des 19. Jahrhunderts weiterschritt. Es war unumgänglich, die vertraute Logik zu durchbrechen und alle Probleme von einer völlig neuen Seite her zu betrachten. Dies gelang Einstein.

5 Prinzip der Äquivalenz

In allen Überlegungen über die Natur der Gravitation, die im Verlaufe von Jahrhunderten angestellt wurden, fehlten zwei Komponenten. die sich tatsächlich, einander kompliziert durchdringend, als das Wichtigste für die Theorie erwiesen. Niemand konnte vermuten, dass eine Verbindung zwischen den Beobachtungen Galileis über den freien Fall der Körper und den Überlegungen über die Natur der Axiome der Geometrie entdeckt wird und dass gerade darin das Wichtigste besteht, was unumgänglich ist für den Aufbau einer der vollendetsten Theorien.

Galilei gebührt die Ehre der Entdeckung des Gesetzes, nach dem alle Körper mit gleicher Beschleunigung auf die Erde fallen. Durch die Beobachtung eines Leuchters in einem Dom entdeckte Galilei, dass die Schwingungsdauer eines Pendels nicht von der Amplitude abhängt, sondern sich nur aus seiner Fadenlänge berechnet. Indem er des Pendel als fallenden Körper auffasste, löste er die erste Aufgabe der Mechanik. Galilei verstand sogar, dass man durch die Messung der Schwingungsdauer des Pendels dessen Länge bestimmen kann.

Das Wichtigste aber bestand darin, dass die Bewegung eines Körpers im Schwerefeld der Erde nicht von dessen Masse abhängt. Diese verwunderliche Tatsache kannte aber erst Newton bemerken, da nur in seinen Gleichungen der Mechanik die Masse an ihrem Platz stand und exakt die Rolle der Kraft bestimmte.

Newton versuchte diese Erscheinung experimentell zu überprüfen. Er beobachtete die Schwingungen von Pendeln, die aus unterschiedlichen Materialien gefertigt waren und konnte keinerlei Unterschied finden: die Schwingungsdauer hing immer nur von der Pendellänge ab. Daraus folgt, dass die Masse eines Körpers, wie sie in die Newtonsche Gleichung (welche festlegt, wie sich die Geschwindigkeit eines Körpers unter dem Einfluss vorgegebener Kräfte ändert) eingeht und die Masse eines Körpers, wie in das Gravitationsgesetz eingeht, ein und dieselbe Größe ist. Genauer muss man sagen, dass diese zwei Massen, die träge und die schwere Masse, einander proportional sind und dass der Proportionalitätsfaktor für alle Körper ein und derselbe ist. Diese zwei Massen werden gewöhnlich als einander genau gleich angenommen; nur im Gravitationsgesetz wird ein konstanter Koeffizient γ eingeführt, das 2. Newtonsche Gesetz wird ohne Koeffizient geschrieben.

Diese Gleichheit von träger und schwerer Masse wird heute als Äquivalenzgesetz bezeichnet.

Mit diesem Gesetz haben wir es laufend im täglichen Leben zu tun, wenn wir dies manchmal auch nicht bemerken. Wenn auf der Waage 1 kg Brot abgewogen wird, achtet niemand darauf, dass dabei die vom Brot und vom Gewicht auf die Erde gerichteten Anziehungskräfte oder aber die Federspannung und die Anziehungskraft der Erde miteinander verglichen werden. In allen Fällen wird die Gleichheit von träger und schwerer Masse als offensichtlich angenommen. Man wird sich auch daran erinnern, wie schwierig es in der Schule ist, den Unterschied zwischen Gewicht und Masse zu erklären, weil diese Begriffe schon von Kindheit an in unserem Bewusstsein durcheinandergeworfen werden.

Schauen wir uns im Gegensatz dazu das Verhalten eines Elektrons im elektrischen Feld an. Die auf das Elektron wirkende Kraft beträgt eE, seine Beschleunigung ist jedoch umgekehrt proportional zur Masse m. Daraus folgt, dass die Bewegung des Elektrons durch das Verhältnis von Ladung zu Masse e/m bestimmt wird. Diese Größe ist für verschiedene Teilchen und Körper verschieden und es gibt hier nichts, was dem Äquivalenzprinzip ähnlich wäre. Die Beschleunigungen von α-Teilchen und Protonen verhalten sich im Schwerefeld wie 1 : 1, im elektrischen Feld Jedoch wie 1/2 : 1.

Im Schwerefeld spielt die schwere Masse die Rolle der Ladung, sie bestimmt die Stärke der Kraft. Das Äquivalenzprinzip behauptet, dass das Verhältnis von „Gravitationsladung“ und Masse für alle Körper im gesamten Weltall gleich 1 ist. In dieser Form behauptet dieses Gesetz bedeutend mehr, als Galilei bekannt war. Das Prinzip der Äquivalenz gilt in einem beliebigen Gravitationsfeld, nicht nur in dem der Erde. Diese Tatsache wurde genau überprüft durch Beobachtungen der Planetenbewegungen und der Mondbahn und durch den Vergleich mit den berechneten Werten.

Zweifellos muss man Newton als zweiten Vater dieses Naturgesetzes bezeichnen (welches bei Newton selbst nicht vom Gravitationsgesetz abgetrennt war).

Im 19. Jahrhundert überprüfte Bessel durch Beobachtungen von aus verschiedenen Materialien bestehenden Pendeln das Äquivalenzgesetz mit einer Genauigkeit von 0,1 %.

Ende des 19._Jehrhunderts (1896) erdachte der ungarische Physiker Eötvös eine Möglichkeit zur Überprüfung dieses Gesetzes, die auf einem vollkommen anderen Prinzip beruhte. Seine Idee bestand im Vergleich der infolge Erdrotation auftretenden Zentrifugalkraft mit der Erdanziehungskraft. Sein Gerät bestand aus einem Waagebalken, der in der Mitte an einem dünnen Faden aufgehängt war. An seinen Enden waren zwei ähnliche Körper mit gleichen schweren Massen befestigt, so dass sich die Waage im Gleichgewicht befand. Wenn die trägen Massen der Probekörper unterschiedlich wären, dann würden auf sie unterschiedliche Zentrifugalkräfte wirken in Abhängigkeit davon, in welche Richtung der Waagebalken zeigt, von Ost nach West oder von West nach Ost. Durch die Messung der Verdrillung des Fadens konnte Eötvös keinerlei Unterschiede finden und schlussfolgerte, dass die Gleichheit von träger und schwerer Masse sehr genau erfüllt ist. Der Fehler übersteigt nicht den Ewert 10^{-8}.

Noch genauere Experimente, welche auf derselben Idee beruhten, wurden in Moskau von Braginski durchgeführt. Er verringerte den möglichen Fehler auf 10^{-12}, so dass wir mit vollem Recht das Äquivalenzprinzip als eines der strengsten Naturgesetze bezeichnen können. Das ist berechtigt, wenn man bedenkt, dass das Gesetz von der Erhaltung der Energie bei Kernreaktionen heute nur mit einer Genauigkeit von 10^{-6} nachgewiesen ist.

6 Nichteuklidische Geometrie

Als im Jahre 1863 der Kasaner Mathematiker Lobatschewski seine „Imaginäre Geometrie“ veröffentlichte, verspotteten viele seiner Kollegen die große Entdeckung. Genauso wurde auch sein ungarischer Zeitgenosse Bolyai nicht verstanden, der unabhängig davon eine Möglichkeit zum Aufbau einer Geometrie fand, die sich von der Geometrie Euklids unterschied.

Die Rolle der Entdeckung Lobatschewskis ist sehr vielseitig. Außer ihrer eigentlichen als Geometrie erzwang sie eine neue Einstellung zur Mathematik.

Wir verstehen heute gut, dass ein beliebiges System von Axiomen nicht nur an einem, sondern an vielen Modellen realisiert werden kann, die in ihrem physikalischen Gehalt ganz unterschiedlich sein können. Und wir wissen, dass die Frage, welches System von Axiomen die Beziehungen zwischen Punkten, Geraden, Figuren usw. unserer realen Welt befriedigt, nicht auf dem Wege des Nachdenkens, sondern mit Hilfe von Experimenten entschieden werden muss. Lobatschewski und Gauß dachten über die Summe der Winkel in einem Dreieck nach, der letztere versuchte sogar eine Messung der Winkelsumme, hatte aber keinen Erfolg. Heute wissen wir, warum der Versuch erfolglos war. Infolge des Schwerefeldes der Erde weicht die Winkelsumme des Dreiecks (eines ebenen, nicht eines auf die Kugeloberfläche der Erde gezeichneten) von π um $10^{-9} \cdot (l/R)^2$ ab, wobei l die Länge der Dreiecksseite und R der Radius der Erde sind. Bei l = 10 km ist die Winkelsumme des Dreiecks um 10^{-15} rad größer als π.

Es ist klar, dass ein solcher Unterschied sogar heute praktisch nicht bemerkbar ist. Die Geometer des vorigen Jahrhunderts dachten trotzdem über die Realisierung der Geometrie Lobatschewskis im gewöhnlichen Raum nach, jedoch erst nach der Entdeckung der Relativitätstheorie fand Minkowski, dass die nichteuklidische Geometrie benötigt wird für die Beschreibung einer 4-dimensionalen Welt, welche Raum und Zeit vereinigt. Doch es erwies sich, dass die Geometrie Lobatschewskis auch im 3-dimensionalen Raum realisierbar ist. Im Jahre 1909 zeigte Sommerfeld, dass sich in der Relativitätstheorie Geschwindigkeitsvektoren so zusammensetzen, wie sich Vektoren in der Geometrie Lobatschewskis zusammensetzen.

Das bedeutet, dass in einem Geschwindigkeitsraum, in dem aus den Geschwindigkeitsvektoren Dreiecke, parallele Geraden usw. gebildet werden sollen, zu deren Berechnung nicht die Formeln der gewöhnlichen Trigonometrie, sondern die Formeln der Trigonometrie Lobatschewskis herangezogen werden müssen. Offensichtlich war dies das erste Beispiel der Anwendung der Formeln der „Imaginären Geometrie“. In der Gegenwart werden mittels dieser Formeln die Stöße schneller Elementarteilchen berechnet.

Uns interessiert jetzt aber nicht der Geschwindigkeitsraum, der wohl in gewissem Sinne als imaginär bezeichnet werden kann, sondern der gewöhnliche Raum, in dem wir leben und arbeiten. Im Jahre 1854 hielt Riemann an der Universität Göttingen seine erste Probevorlesung „Über Hypothesen, die der Geometrie zugrunde liegen“. Dieser Vortrag wurde von den Mathematikern nicht beachtet, erst 14 Jahre später wurde sein Text durch Dedekind veröffentlicht. Unter anderem wurde im Vortrag gesagt:

„Die Sätze der Geometrie leiten sich nicht ab aus den allgemeinen Eigenschaften dimensionsbehafteter Größen, im Gegenteil, jene Eigenschaften, welche den Raum aus anderen denkbaren dreidimensionalen Größen hervorheben, können nicht anders als aus dem Experiment geschöpft werden".

Zu Zeiten Riemanns gab es niemanden. der diesen kühnen Gedanken hätte richtig einschätzen können. Wenn auch nicht sofort, so verwandelte sich doch Anfang des 20. Jahrhunderts die Idee der Existenz eines Raumes mit nichteuklidischer Geometrie, das, was heute Riemannsche Geometrie genannt wird, in ein fruchtbares Gebiet der Mathematik.

Vielleicht sollte man sich darüber wundern, dass während eines halben Jahrhunderts praktisch niemand einen einzigen Schritt auf dem Wege zur Aufklärung der Geometrie der realen Welt machen konnte. Warum wer das so? Heute er- kennen wir natürlich klar, warum das so war.

Die Erforschung der Natur der Gravitation entwickelte sich in einer völlig anderen Richtung: die Physiker verbrauchten ihre Kräfte damit, die Gravitation in eines der Äthermodelle hineinzuzwängen. Das Prinzip der Äquivalenz schien so trivial, dass niemand die geringste Möglichkeit sah, aus ihm irgendeinen Nutzen zu ziehen. Den Mathematikern waren Ende des vergangenen Jahrhunderts schon unterschiedliche Geometrien bekennt, aber keiner begriff, wie man die Geometrie der Welt bestimmen musste, falls deren Abweichung von der Geometrie Euklids so klein wäre, dass sie im Experiment nicht nachweisbar wäre. Es existierten keinerlei Gleichungen, die es erlaubt hätten, irgendetwas über die reale Welt auszusagen. Das Wichtigste war, dass es noch kein Verständnis jenes Zusammenhangs von Raum und Zeit gab, wie er von der speziellen Relativitätstheorie hergestellt wurde.

Im Jahre 1905 erblickte die spezielle Relativitätstheorie das Licht dieser Welt. Zwei Jahre später beginnt Einstein seine Analyse der Gravitation mit den Problemen der Änderung des Ganges einer Uhr und der Krümmung eines Lichtstrahles im Gravitationsfeld. Jedoch erst nach 8 Jahren gelang es Einstein, die Gleichungen des Gravitationsfeldes zu finden.

Lange vor Einstein versuchte Poincaré, die Gravitation und das Relativitätsprinzip zu vereinigen, aber er beschränkte sich auf die Diskussion der Frage über die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Gravitationswechselwirkung.

Es gab wahrhaftig einen Physiker, der den richtigen Gleichungen näher kam als alle anderen. Das war Nordström. Er nahm an, dass das Gravitationsfeld durch einen Skalar beschrieben wird und baute auf dieser Voraussetzung eine logische Theorie auf. Nordström begriff jedoch nicht die Wichtigkeit des Äquivalenzprinzips, und seine Theorie befriedigte dieses Prinzip nicht. Man darf nicht denken, dass eine solche Nichtbeachtung des Äquivalenzprinzips sofort zu einem Widerspruch mit dem Experiment geführt hätte. Die Gravitationskräfte sind so gering, dass zu jener Zeit keine Versuche durchgeführt werden konnten, und das Äquivalenzprinzip hat niemanden außer Einstein beunruhigt. Einstein aber war so überzeugt von der grundlegenden Bedeutung dieses Prinzips, dass er sofort die Theorie Nordströms ablehnte, trotz ihrer mathematischen Einfachheit und Glaubwürdigkeit. In dieser schwierigen Lage, in der sich die Theorie der Gravitation zu Beginn unseres Jahrhunderts befand, war es nötig, bestimmte allgemeine Prinzipien zu finden, durch die man ohne Experimente auf die Gleichungen der Gravitation kommt. Als ein solches Prinzip erwies sich das Prinzip der allgemeinen Kovarianz.

Die Theorie der Gravitation wird allgemeine Relativitätstheorie genannt; heute kann gezeigt werden, dass diese Bezeichnung veraltet ist, dass die Symmetrieeigenschaften der Gleichung keine prinzipielle Bedeutung heben. Jedoch einzig und allein die Erweiterung des Rahmens der speziellen Relativitätstheorie erlaubte es Einstein, das fast Unmögliche zu erreichen, nämlich die Gleichung niederzuschreiben, die sich weder aus anderen Gleichungen ableiten ließ noch aus experimentellen Ergebnissen folgte. Sie ergab sich aus der Diskussion dessen, was mit den Gleichungen der speziellen Relativitätstheorie geschieht, falls man von einem Inertialsystem zu einem beschleunigten System übergeht. Falls das Prinzip der Kovarianz nicht formuliert gewesen wäre, dann wäre die Lösung des Gravitationsproblems um 50 Jahre verzögert worden und die Probleme des Verhaltens des Weltalls, die Aufgaben der Kosmologie, wären auch heute noch außerhalb des Zugriffsbereichs der Physiker.

7 Relativität und Beschleunigung

Die Idee der allgemeinen Kovarianz kann man mit Worten ganz einfach ausdrücken. Die Bewegungsgleichungen müssen so geschrieben werden, dass sie nicht von der Bewegungsform des Beobachters abhängen. Diese Forderung scheint ganz natürlich zu sein, falls man versteht, dass es in der Natur keinerlei Äther gibt und dass alle Felder, elektromagnetische Felder, Gravitationsfelder und beliebige andere Felder selbständig existieren und keinerlei andere materiellen Träger benötigen. Erneut begegnen wir einem Prinzip, dass so offensichtlich zu sein scheint wie das Prinzip der Äquivalenz.

Falls wir, am Ufer stehend, auf ein fahrendes Schiff schauen, dann hat seine Geschwindigkeit einen bestimmten Wert. Wenn wir aber von Bord eines anderen Schiffes aus schauen, dann ergibt sich eine andere Geschwindigkeit. Wenn wir aus dem Zugfenster auf den sich entfernenden Bahnhof zurückblicken, dann überzeugen wir uns mit eigenen Augen von der Relativität der Geschwindigkeit. Es scheint so, als ob es hierbei nichts Wissenschaftliches gibt und dass mit derartigen Erörterungen keine neue Wahrheit zu entdecken ist. Aber sogar bei einem solch einfachen Versuch kann man ein Paradoxon finden. Wenn die Geschwindigkeit des Zuges und des Bahnhofs nur relativ sind, warum sind dann die Elektromotoren immer im Zug angebracht und nicht auf dem Bahnhof?

Mit dem Wort „offensichtlich“ sollte man also vorsichtig umgehen. Setzen wir die offensichtlichen Erörterungen über die Relativität der Bewegung von Zug und Bahnhof fort. Das Paradoxon mit den Elektromotoren können wir leicht beseitigen, wenn wir sagen, dass die Energie nicht für die Bewegung benötigt wird, sondern der Überwindung der Reibung zwischen den Rädern und den Gleisen dient, welche sich relativ zum Bahnhof nicht bewegen. Wenn es aber offensichtlich ist, dass die Geschwindigkeit relativ ist, dann sollte in demselben Grade an Offensichtlichkeit auch die Beschleunigung relativ sein.

Der Begriff der Relativität der Beschleunigung verbirgt in sich jedoch unerwartete Schwierigkeiten. Noch vor der Entdeckung der Relativitätstheorie dachte sich Mach ein Paradoxon aus, welches die Physiker in eine Sackgasse geraten ließ. Stellen wir uns vor, dass sich in einer leeren Welt eine Kugel dreht. Falls es irgendeinen Beobachter gibt, der nicht mit der Kugel verbunden ist, dann kann man annehmen, dass die Kugel sich relativ zu diesem Beobachter dreht. Wie kann man aber von Rotation sprechen, wenn es keinen Beobachter gibt, die Kugel sich also einsam in einer leeren Welt dreht? Stellen wir uns beispielsweise vor, dass sich auf der Venus, deren Himmel immer von dichten Wolken bedeckt ist, ein Beobachter befindet. Inwiefern könnte er schlussfolgern, dass sich sein Planet dreht? Relativ wozu könnte ein solcher Beobachter den Drehwinkel fixieren?

Wenn man über die Relativität der Geschwindigkeit spricht, dann tritt kein solches Paradoxon auf. Ein im leeren Raum sich gleichförmig bewegendes Schiff unterscheiden wir in Übereinstimmung mit dem Relativitätsprinzip nicht von einem ruhenden Schiff. Auf einem mit konstanter Geschwindigkeit fahrenden Schiff laufen alle Vorgänge, mechanische (nach Galilei) und elektromagnetische (nach Einstein), ganz genauso ab wie auf einem ruhenden Schiff. Die Entscheidung, ob das Schiff schwimmt oder ruht, kann man nur durch die Beobachtung einer äußeren Marke treffen. In einer abgeschlossenen Schiffskabine kann diese Entscheidung durch keinerlei Experimente herbeigeführt werden.

Ganz anders verhält sich die Sache mit der rotierenden Kugel. Der Beobachter auf der Venus kann ganz leicht die Rotation feststellen mittels der Trägheitskräfte – der Zentrifugalkraft und der Corioliskraft. Er erfährt von ihr durch die Schwerkraftänderung am Äquator, durch die unterspülten Flussufer (falls es sie gibt), durch die Schwingungen eines Foucaultschen Pendels und auf verschiedene andere Weise. Der Beobachter auf der Venus kann die Größe seiner Winkelgeschwindigkeit messen und er erhält die Winkelgeschwindigkeit selbst, absolut, ohne Beziehung zu irgendeinem äußeren Beobachter oder zu irgendeinem äußeren Inertialsystem. Das kann einem verwunderlich erscheinen, und Mach kam bei der Analyse der Situation zu dem Schluss, dass die Trägheitskräfte durch die Masse der unbeweglichen Sterne, die auf irgendeine Weise auf den rotierenden Körper einwirken, bestimmt werden. Mach nahm sogar an, dass die gesamte Masse eines Körpers, seine träge Masse, auf irgendeine Weise verknüpft ist mit der Sphäre der unbeweglichen Sterne und dass im absolut leeren Raum ein Körper überhaupt keine Masse haben wurde. Diskussionen zu dieser Frage lodern bis heute auf den Seiten der Zeitschriften auf.

Man versuchte sogar durch Versuche zu erkennen, wie sich ein Körper in verschiedenen Richtungen bezüglich der Ebene unserer Galaxis bewegt. Falls Mach Recht hätte, dann müsste die Messe eines Körpers infolge der Anisotropie der Massenverteilung in der Galaxis in verschiedenen Richtungen auch verschieden sein, ein und dieselbe Kraft würde dem Körper unterschiedliche Beschleunigungen übertragen, falls sie in der Ebene der Galaxis oder senkrecht dazu wirken würde. Der Versuch ergab keinerlei Effekt.

Der Schlüssel zur Entscheidung des Problems der Beschleunigung wurde von Einstein gefunden bei der Lösung der Aufgabe von dem Lift, der im Schwerefeld der Erde frei fällt. Man kann den Lift auch durch einen Sputnik[1] ersetzen, dessen Bewegung sich zusammensetzt aus der Überlagerung einer geradlinigen Bewegung infolge seiner Trägheit und einem freien Fall auf die Erde. Dieses Beispiel ist sogar besser, weil der Sputnik sich im Prinzip endlos bewegen kann (falls der Widerstand der Atmosphäre vernachlässigt wird), während die Bewegung eines Lifte einen Anfang und ein Ende hat. Auf einem Sputnik (falls er nicht zu groß ist) gibt es keine Schwerkraft, die Besetzung und alle Gegenstände befinden sich im Zustand der Schwerelosigkeit.

Man kann die Vermutung ausdrücken (und das tat Einstein), dass mit keinerlei Experimenten innerhalb des Sputniks (d.h. ohne Verbindung zu einem äußeren Beobachter) festgestellt werden kann, ob sich der Sputnik bewegt oder ob er ruht, man kann nicht erfahren, ob er sich im

[1] Anmerkung des Überarbeiters: Sputnik war der Name der ersten russischen Satelliten.

Schwerefeld der Erde befindet. Der Übergang in ein Nichtinertialsystem kompensiert vollständig das Schwerefeld. Genau gesagt gilt dies, falls wir innerhalb des Sputniks ein homogenes Schwerefeld annehmen können, d.h. falls die Beschleunigung durch die Schwerkraft in allen Punkten des Sputniks gleich groß ist. Eine derartige Annahme ist natürlich gerechtfertigt, solange die Abmessungen des Sputniks klein sind im Vergleich zu seinem Abstand vom Erdmittelpunkt.

Obwohl heutzutage die mit dem Sputnik verbundene Schwerelosigkeit kaum jemanden unerwartet vorkommt, wurde diese Erscheinung lange nicht verstanden. Sogar Jules Verne mit seiner hellseherischen Begabung, der viele Einzelheiten eines Fluges zum Mond richtig beschrieben hat, nahm an, dass sich die Schwerelosigkeit nur in einem Punkte des Weges realisiert, in dem Punkt, in dem sich die Anziehungskräfte von Erde und Mond gegenseitig aufheben.

Beim Versuch mit dem fallenden Lift (oder mit dem Sputnik) trafen zwei Tatsachen zusammen: das Prinzip der Äquivalenz, welches die Unabhängigkeit der Beschleunigung von der Masse in einem Schwerefeld postuliert, und die Bewegungsgesetze im beschleunigten System, die die Unabhängigkeit der durch Trägheitskräfte hervorgerufenen Beschleunigung von der Masse des Körpers postulieren.

Diese zwei Tatsachen sind, wie sich zeigte, völlig unterschiedlicher Natur. Die Beschleunigung durch Trägheitskräfte ist mit einer einfachen Kinematik verbunden, mit dem Übergang zu einem unerlaubten (zu einem beschleunigten) Koordinatensystem, was für viele der Grund war, diese Kräfte als fiktiv, als nicht real zu bezeichnen. Eine Beschleunigung durch die Schwerkraft ist mit den dynamischen Gesetzen der Gravitation verbunden, also mit sehr realen Kräften. Trotzdem können sich diese Kräfte gegenseitig kompensieren, weshalb man ihnen auch ein und dieselbe Natur zuordnen muss. Auf diese Weise entstand die Idee, dass Beschleunigung und Schwerkraft auf irgendeine Weise miteinander verknüpft sind.

Die Diskussionen über die Beschleunigung mögen dennoch ziemlich einfach erscheinen, und, falls man die Mechanik beherrscht, wird es offensichtlich, dass alle Körper mit gleicher Beschleunigung fallen, so dass keinerlei Beschleunigung eines fallenden Körpers relativ zu einem anderen auftritt. Und trotzdem kann man auch auf solch scheinbar einfachem Weg auf ein Paradoxon stoßen. Stellen wir uns vor, dass der Sputnik eine geladene Kugel darstellt. Es ist gut bekannt, dass bei einer beschleunigten Bewegung einer elektrischen Ladung elektromagnetische Wellen abgestrahlt werden. Diese Erscheinung wird zur Erzeugung von Radiowellen benutzt. Hier erhebt sich nun die natürliche Frage: Strahlt auch die Ladung auf dem Sputnik?

Einerseits, vom Standpunkt eines Beobachters auf der Erde, bewegt sich die Ladung mit einer Zentripetalbeschleunigung und muss strahlen. Mittels der Formeln der Elektrodynamik kann man sogar die Energie berechnen, welche der Sputnik durch Strahlung verliert.

Andererseits wurde festgestellt, dass man durch keinerlei Versuche innerhalb des Sputniks dessen Beschleunigung messen kann. Vom Standpunkt des Kosmonauten aus sollte vielmehr eine Ladung strahlen, die sich auf der Erde befindet, weil gerade sie sich relativ zum Sputnik beschleunigt bewegt.

Die Ausstrahlung elektromagnetischer Wellen ist aber eine physikalische Erscheinung, die deshalb nicht vom Koordinatensystem abhängen kann. Es ist unmöglich, dass vom einen Standpunkt aus die Ladung auf dem Sputnik strahlt, vom anderen Standpunkt aus aber die Ladung auf der Erde. Das ist schon deshalb nicht möglich, weil durch die Strahlung Energie verloren geht und die Ladung abgebremst wird, d.h. sich gegenüber dem Koordinatensystem verlangsamt. Es ist intuitiv klar, dass der geladene Sputnik strahlen muss; er wird sich verlangsamen und auf eine erdnähere Bahn übergehen. Die Intuition kann aber trügen. Später werden wir sehen, dass die Lösung dieses Paradoxons verwandt ist der Lösung des Machschen Paradoxons. Jetzt müssen wir erst einmal erläutern, dass das Äquivalenzprinzip nicht trivial ist, sondern eine völlig exakte physikalische Hypothese darstellt.

8 Geometrie und Mechanik

Die Diskussion über die Beschleunigung sollte uns veranlassen, über mögliche Komplikationen nachzudenken, die mit der Einführung des elektromagnetischen Feldes verbunden sein können. Deshalb werden wir vorläufig nur über die Bewegung von Teilchen und die Ausbreitung von Lichtstrahlen sprechen und wellenförmige Prozesse beiseitelassen. Das bedeutet, dass wir uns auf das Studium der Bahnen von Teilchen und Lichtstrahlen beschränken. Wir wollen sehen, was mit ihnen passiert, wenn sie in ein Gravitationsfeld geraten.

Wir wissen, dass die Bewegungsgesetze der Planeten im Gravitationsfeld nicht von deren Masse abhängig sind, dass sich Planeten unterschiedlicher Massen in gleicher Weise bewegen. Das wusste schon Kepler, denn in seine Formeln geht die Planetenmasse nicht ein (bei genauerer Betrachtung sind die Störungen durch die übrigen Planeten zu berücksichtigen, so daß die relativen Massen eingehen). Folglich muß die Theorie so aufgebaut werden, daß in ihr automatisch das Äquivalenzprinzip erfüllt ist.

Wie man das macht, das verstand Einstein. Es ist nötig, alle Eigenschaften der Bewegung im Feld der Sonne auf die Eigenschaften des Raumes in der Umgebung der Sonne zu übertragen, wobei ganz entschieden die Newtonsche Konzeption des leeren euklidischen Raums abgelehnt werden muß, in dem wie auf einer Szenerie die als physikalische Erscheinungen bezeichneten Vorgänge ablaufen.

Es ist nicht schwer, all dies zu Verstehen. Dazu muß man seine Aufmerksamkeit auf den engen Zusammenhang zwischen Kinematik und Geometrie lenken. Wenn festgestellt wird, daß ein sich aufgrund seiner Trägheit bewegender materieller Punkt eine gerade Linie beschreibt, dann wird in den Mechanikkursen nicht danach gefragt, was eine gerade Linie ist, es wird angenommen, daß allen eine gerade Linie bekannt ist. Wie wird aber eine gerade Linie gezogen? Mit dem Lineal? Eine solche Lösung ist nicht akzeptabel, denn es muß geprüft werden, ob das Lineal gerade ist.

Es können 3 Möglichkeiten vorgeschlagen werden für die Prüfung: man kann feststellen, wie sich ein Massenpunkt aufgrund seiner Trägheit bewegt, man kann sehen, wie sich ein Lichtstrahl ausbreitet, oder man spannt einfach einen Faden aus. Jedes andere Verfahren erweist sich nur als eine Komplizierung dieser 3 Möglichkeiten. Das erste Verfahren führt zu nichts, weil wir nicht wissen, was das für eine Bewegung infolge Trägheit ist (wie soll man prüfen, daß auf den Körper keine Kräfte einwirken?). Das zweite Verfahren ist nicht besser, denn wir wissen nicht, wie sich Licht ausbreitet; daß es sich auf einer Geraden bewegt, war postuliert worden. Falls wir von vornherein wüßten, daß es im Raum kein Schwerefeld gibt, dann wären beide Verfahren anwendbar. Es handelt sich aber gerade darum, zu prüfen, ob es ein Feld gibt oder nicht. Das dritte Verfahren hängt offensichtlich ab vom Gravitationsfeld, der Faden hängt infolge seines Eigengewichts durch und kann somit nicht als Etalon dienen.

Die Schlußfolgerung drängt sich von selbst auf: Wir können nicht unabhängig die Geometrie des Raums bestimmen und danach die Bewegung des Körpers aufgrund seiner Trägheit. Solange die Mathematiker nur die euklidische Geometrie kannten, war alles einfach. Alle waren überzeugt, daß keine andere, logisch widerspruchsfreie Geometrie existieren kann, und deshalb gab es auch keinerlei Zweifel an der Formulierung der Newtonschen Gesetze.

Doch nach den Entdeckungen von Lobatschewski, Bolyai, Gauß und Riemann, als die Ideen und die Sprache der nichteuklidischen Geometrie nicht mehr als extravagant erschienen, war es nicht mehr offensichtlich, dass die Geometrie Euklids in unserem Raum richtig sein muss. Es zeigte sich beispielsweise, dass die Geschwindigkeitsvektoren sich in der speziellen Relativitätstheorie nicht wie gewöhnliche Vektoren des euklidischen Raums, sondern nach den Gesetzen der Geometrie Lobatschewskis zusammensetzen. Riemann stellte eine neue Geometrie auf, die es erlaubte, einen solchen Raum zu betrachten, in dem die geometrischen Gesetze in seinen verschiedenen Punkten auch unterschiedlich sein können. So wie Lobatschewski verstand auch Riemann, dass man nur aus dem Experiment Rückschlüsse auf die Geometrie unserer Welt ziehen kann.

Einstein begriff außerdem, dass nach der speziellen Relativitätstheorie die Geometrie der Welt nicht im dreidimensionalen Raum, sondern in der vierdimensionalen Raumzeit angesiedelt werden muss. Das bedeutet, dass im Prinzip die Geometrie der dreidimensionalen Welt verschieden sein kann für Teilchen mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten. Nur eine solche Geometrie ist in der Lage, die

Vielfalt der möglichen Bewegungen zu beschreiben. Diese Feststellung ist eine einfache Folge der Keplerschen Gesetze, nach denen ein Planet auf jeder Umlaufbahn seine eigene Geschwindigkeit besitzt, die nach dem 3. Gesetz bestimmt werden kann.

Die Beschreibung der Bewegung mittels der Gesetze der Mechanik muss demzufolge umgewandelt werden in eine Beschreibung der Geometrie des Raumes.

Eine solche Beschreibung kann gut durch die Geometrie einer gewöhnlichen zweidimensionalen Kugeloberfläche illustriert werden, welche man auf zweierlei Weise beschreiben kann. Einmal kann das erreicht werden durch Verwendung der Eigenschaften einer Kugeloberfläche im dreidimensionalen euklidischen Raum. Man kann aber auch anders verfahren, indem man sich das Ziel stellt, alle Eigenschaften der Kugeloberfläche ohne Übergang in den dreidimensionalen Raum zu beschreiben, wobei man nur solche Größen verwendet, die man auf der Oberfläche selbst messen kann. Es zeigt sich, und das war von Riemann für eine beliebige Oberfläche bewiesen worden, dass man die gesamte Geometrie auf diese Weise begründen kann.

Für eine Kugeloberfläche ist die Aufgabe besonders einfach, man muss nur den Radius der Kugel messen. Eine einfache Methode wäre eine Weltumwanderung. Wir könnten dann den Radius der Kugel erfahren, wenn uns irgendjemand mitteilen würde, dass wir auf einer idealen Kugeloberfläche leben. Eine solche Mitteilung kann jedoch auch umgangen werden. Falls wir sehr genau die Winkel eines Dreiecks messen, dessen Seiten jeweils Bogen eines Großkreises darstellen, und feststellen, um welchen Betrag diese Summe 180° übersteigt (wir finden damit den sphärischen Exzess δ) und wenn wir außerdem noch die Dreiecksfläche S bestimmen, so liefert uns das Verhältnis S/δ das Quadrat des

Kugelradius. Jetzt können wir auch prüfen, ob es sich um eine ideale Kugel handelt, indem wir das Verhältnis an verschiedenen Stellen der Oberfläche und an Dreiecken verschiedener Abmessungen ermitteln.

Falls wir beispielsweise ein Dreieck wählen mit den Ecken am Pol und in zwei Punkten, die sich im Abstand von 90° auf dem Äquator befinden, dann sind alle Winkel des Dreiecks rechte Winkel. Der sphärische Exzess beträgt dann

$$\delta = 270° - 180° = 90° = \frac{\pi}{2}.$$

Damit ergibt sich für die Dreiecksfläche $S = \delta R^2 = \pi R^2/2$. Das ist gerade 1/8 der gesamten Kugeloberfläche von $4 \pi R^2$. Aus diesem Beispiel ist ersichtlich, dass man die Oberflächeneigenschaften untersuchen und beschreiben kann, ohne aus der Oberfläche selbst heraustreten zu müssen, mit Methoden der sogenannten inneren Geometrie.

Eine solche Beschreibung ist offensichtlich nicht mit irgendeinem äußeren Koordinatensystem verknüpft, wie das der Fall wäre bei einer Beschreibung der Oberfläche im dreidimensionalen Raum, bei welcher die Gleichung der Oberfläche unbedingt mit irgendeinem Körper verbunden sein muss und noch eine Messung mehr durchgeführt werden muss, als dies vom physikalischen Standpunkt aus erforderlich wäre.

Analog dieser inneren Geometrie der Kugeloberfläche kann man auch über die Geometrie der vierdimensionalen Raumzeit sprechen. Man kann alle ihre geometrischen Eigenschaften beschreiben, ohne diese Beschreibung mit irgendeinem Koordinatensystem verbinden zu müssen. Gewöhnlich sagt man, dass sich eine solche Beschreibung nicht ändern darf, wenn man die 4 Koordinaten x,y,z,t durch beliebige andere ersetzt.

Falls sich die Gleichungen wirklich nicht ändern bei einem Übergang von einem System mit den Koordinaten x,y,z,t zu einem anderen mit den Koordinaten

$$\begin{array}{ll} x' = \varphi_1(x,y,z,t) & y' = \varphi_2(x,y,z,t) \\ z' = \varphi_3(x,y,z,t) & t' = \varphi_4(x,y,z,t) \ , \end{array}$$

wobei die φ_i fast beliebige Funktionen sein können, dann werden solche Gleichungen als kovariant bezeichnet.

Das Prinzip der allgemeinen Kovarianz erwies sich als sehr wichtig, weil es die Möglichkeit eröffnet, die Gravitationsgleichungen aufzustellen.

Somit vereinigen sich das Äquivalenzprinzip und das Prinzip der speziellen Relativitätstheorie im allgemeinen Prinzip der Kovarianz.

9 Die Gravitationsgleichungen

Möge eine noch so gute physikalische Idee vorhanden sein, sie verwandelt sich in eine Theorie nur dann, wenn aus ihr Gleichungen hervorgehen. Auch heutzutage kann uns der Akt der Geburt der allgemeinen Relativitätstheorie noch begeistern.

Alles bisher Gesagte liefert in der Tat noch nicht den Schlüssel für das Aufschreiben einer Gleichung. Von Anfang an war klar, dass eine solche Gleichung im Spezialfall übergehen muss in die Newtonsche Gleichung für das Potential. Es war klar, dass sie die geometrischen Eigenschaften des Feldes mit der Verteilung stofflicher Materie verknüpfen muss. Sie sollte auch nicht den Sätzen von der Erhaltung der Energie und des Impulses widersprechen.

Bedauerlicherweise verstanden auch die Mathematiker noch nicht genügend die Riemannsche Geometrie, um sagen zu können, welche Räume sich für die Physiker als nützlich erweisen würden. Heute steht den Physikern eine vollständige Klassifikation verschiedener Räume zur Verfügung, zu Beginn unseres Jahrhunderts wusste man davon noch nichts. Es war bekannt, dass 10 Größen die Geometrie bestimmen, die 10 Komponenten eines metrischen Tensors. Falls diese 10 Größen bekannt sind, können alle anderen berechnet werden. Insbesondere kann man auch bestimmen, wie eine Linie aussehen muss, auf welcher sich ein materieller Punkt bewegt. Solche Linien heißen geodätische Linien. Im gewöhnlichen Raum sind geodätische Linien gewöhnliche Geraden. Man kann natürlich annehmen, dass im gekrümmten Raum, d.h. im Raum, in dem die nichteuklidische Geometrie gilt, die Rolle der Geraden von den geodätischen Linien übernommen wird. Insbesondere sind auf einer Kugeloberfläche die geodätischen Linien die Großkreise.

Des Weiteren bleibt uns nur übrig zu postulieren, dass sich ein freier materieller Punkt auf einer geodätischen Linie bewegt, und die Mechanik ist begründet. Wie aber kann eine Gleichung gefunden werden, aus der man die benötigten 10 Größen erhält?

Diese Gleichung muss nicht nur die Geometrie der Welt im gegebenen Zeitpunkt bestimmen, sondern auch die zeitliche Änderung der Geometrie beschreiben. Diese Gleichungen müssen auch beschreiben, wie sich der Gang von Uhren in verschiedenen Punkten des Raumes ändert. In der speziellen Relativitätstheorie war alles einfacher. Eine Länge wird wie in der klassischen Mechanik gemessen, die Zeit mit gewöhnlichen Uhren bestimmt. Die Theorie beschäftigt sich damit, wie sich Längen und Zeitintervalle beim Übergang in ein bewegtes Koordinatensystem ändern. Im Gravitationsfeld wird alles komplizierter.

So wie auf einer zweidimensionalen Kugeloberfläche kein rechtwinkliges, kartesisches Koordinatensystem aufgebaut werden kann, so kann ein solches System im gesamten Raum nicht aufgebaut werden, wenn ein Gravitationsfeld vorhanden ist. Infolgedessen müssen die Gleichungen in einem beliebigen vierdimensionalen System niedergeschrieben werden. Ein Punkt in einem solchen Koordinatensystem wird durch 4 Zahlen charakterisiert: durch 3 räumliche Koordinaten und die Zeit. Die Gerade wird nicht mehr als Trajektorie des Teilchens bezeichnet, sondern als Graphik[2] seiner Bewegung (Gesamtheit der Punkte, welche die Lage des Teilchens zu verschiedenen Zeiten beschreiben). Das bedeutet, dass die Geometrie vierdimensional sein muss. Für den heutigen Leser erscheint die vierdimensionale, nicht-euklidische Geometrie möglicherweise nicht mehr paradox.

Als Lobatschewski seine Arbeit erstmals dem Urteil der Mathematiker stellte, da schrieb einer von ihnen 1834 in der Zeitschrift „Sohn des Vaterlandes“: „Viele unserer erstklassigen Mathematiker lasen diese Arbeit und verstanden überhaupt nichts. Danach halte ich es schon nicht mehr für erwähnenswert, dass auch ich, nachdem ich einige Zeit über sein Buch nachgedacht hatte, nichts

[2] Anm. des Überarbeiters: Heute verwenden wir dafür den Begriff Weltlinie.

begriff, d.h. ich verstand fast keinen einzigen seiner Gedanken...“. Heute sprechen kaum Schüler so, denn den vierdimensionalen Charakter der Geometrie kann man auf folgende Weise verstehen.

Um die dreidimensionale Welt zu erkennen, muss man alle Punkte dieser Welt gleichzeitig sehen. Es kann aber keinerlei Information augenblicklich übertragen werden. Entfernte Punkte erblicken wir unausweichlich in einem früheren Moment ihrer Existenz, d.h. wir sehen sie so, wie sie früher waren. Blicken wir zum Himmel, dann sehen wir die ferneren Galaxien jünger als die näheren. Das Bild der Welt, das sich vor unseren Augen ausbreitet, das ist nicht die Welt in irgendeinem ausgewählten Zeitpunkt, sondern eine Welt, in der alle im Abstand R vom Beobachter befindlichen Objekte um die Zeit R/c jünger sind als der Beobachter. Man sagt euch, dass wir einen Ausschnitt der Welt als Lichtkegel sehen (jede Erzeugende dieses Kegels ist eine Graphik des Weges eines Lichtstrahles

als Funktion der Zeit). In der speziellen Relativitätstheorie erscheint neben der Länge das Intervall Δs. Für zwei benachbarte Weltpunkte bestimmt sich das Quadrat des Intervalls zwischen ihnen zu

$$(\Delta s)^2 = (\Delta l)^2 - c^2(\Delta t)^2 \ ,$$

wobei Δt ihren Zeitunterschied und Δl den gewöhnlichen dreidimensionalen Abstand bedeuten. Diese Größe hängt nicht vom Charakter der Bewegung des Beobachters ab. So ist sie für Licht immer und für alle Beobachter gleich Null. Das bedeutet, dass immer gilt:

$$(\Delta l)^2 = c^2(\Delta t)^2 \ .$$

Das heißt physikalisch, dass die Lichtgeschwindigkeit immer gleich c ist. Ein solcher Ausdruck für das Intervall setzt voraus, dass alle Richtungen im Raum gleichberechtigt sind, d.h. dass die 3 Komponenten von (Δl) in x-, y- und z—Richtung gleichberechtigt sind und dass die Geschwindigkeit des Lichtes immer gleich c ist. Beide Voraussetzungen werden im Gravitationsfeld verletzt. Infolge des Gravitationsfeldes dehnen sich beispielsweise mit zunehmender Annäherung an die Sonne alle Längen in radialer Richtung aus und alle Längen quer zu dieser Richtung ziehen sich zusammen. Auch die Zeit läuft in Sonnennähe langsamer ab, und die Geschwindigkeit des Lichts verringert sich. Diese Aussage wurde durch Versuche an der Sonne und auf der Erde überprüft:

Der Lichtweg von einem Stern wird gekrümmt, wenn das Licht nahe dem Sonnenrand vorbeigeht, als ob es durch ein optisch dichteres Medium mit einem Brechungsindex $n > 1$ hindurchgehen würde.

Die Planeten bewegen sich nicht völlig nach den Newtonschen Gesetzen, sondern so, als ob im Gravitationsgesetz ein kleiner Zusatzterm aufträte, der umgekehrt proportional zu r^3 ist und die Planetenbahnen etwas aufweitet.

Uhren an Bord von Flugzeugen, welche die Erde in großer Höhe umfliegen, gehen schneller infolge des verringerten Gravitationsfeldes. Die Effekte der Relativitätstheorie sind schon lange nicht mehr exotisch, und entsprechende Formeln werden auf vielen Gebieten der Physik und der Astronomie mit Sicherheit verwendet.

Falls das Intervall durch die oben angeführte Formel ausgedrückt wird, ist klar, dass es im Raum kein Gravitationsfeld gibt. Falls ein Gravitationsfeld existiert, dann kann das Intervall schon nicht mehr universell vorgegeben werden, sondern es wird durch 10 Koeffizienten beschrieben, die im allgemeinen Fall Funktionen der Koordinaten und der Zeit sein können.

Einstein gelang es, gerade 10 Gleichungen zu finden, welche diese Koeffizienten zu bestimmen gestatten, falls die das Feld erzeugende Massenverteilung gegeben ist. Zuerst wurden die Gleichungen für das Feld eines Massenpunktes gelöst. Das war die Aufgabe über die Bewegung der Planten, die sogenannte Schwarzschildsche Aufgabe. Die Schwarzschildsche Aufgabe erwies sich als sehr umfangreich. Mit ihrer Lösung begann die Entwicklung der allgemeinen Relativitätstheorie. In dieser Lösung zeigten sich nicht nur kleine Korrekturen der Planetenbewegung, sondern auch völlig neue Erscheinungen, deren Existenz durch die klassische Physik nicht einmal vorausgesagt werden konnte.

10 Planetenbewegung

Für ein von einem massiven Körper erzeugtes Gravitationsfeld kann man ein Theorem formulieren, das dem Theorem Newtons über das Feld eines kugelsymmetrischen Körpers ähnlich ist. Es handelt sich um das nach Birkhoff genannte Theorem. Es besteht in Folgendem:

Unter den Voraussetzungen, dass

- das Gravitationsfeld durch ein System von Körpern erzeugt wird, die sich in einem endlichen Raum bewegen;
- die Massenverteilung in diesem System kugelsymmetrisch ist und
- die Geschwindigkeiten nur Radialkomponenten besitzen und nicht vom Winkel abhängig sind,

ist das Feld eines solchen Systems unabhängig von der Zeit und stimmt außerhalb des Systems mit dem Feld einer Punktmasse überein, die die Masse des Systems besitzt. Folglich kann ein Beobachter keine Schlussfolgerungen über die Massenverteilung und über die Geschwindigkeitsverteilung innerhalb eines solchen Systems ziehen, falls er sich nur auf die Messung der Schwerkraft beschränkt.

Deshalb können wir bei der Behandlung des Feldes der Sonne die Lösung für das Feld einer Punktmasse anwenden. Die Bedingungen des Theorems werden verletzt, falls sich die Quelle des Feldes in Rotation befindet. In diesem Falle verliert das System seine Kugelsymmetrie und nimmt eine axiale Symmetrie an. Für die Sonne ist dieser Effekt gering. Es gibt ein Projekt zur Untersuchung der Wechselwirkung des Feldes der rotierenden Erde mit einem ebenfalls rotierenden Gyroskop. Dieser Effekt ist der Wechselwirkung zweier magnetischer Momente sehr ähnlich, die durch bewegte elektrische Ladungen erzeugt werden. Die experimentelle Erforschung der Gravitationsfelder rotierender Körper ist jedoch sehr schwierig. Wir werden aber sehen, dass das Rotationsfeld bei „schwarzen Löchern" sich als sehr beträchtlich erweist.

Zunächst wollen wir abschätzen, welche Größe die Korrektur haben muss, die infolge der Gravitationstheorie in den klassischen Gesetzen der Planetenbewegung angebracht werden muss.

Newton wusste nicht, dass die Geschwindigkeit nicht größer sein kann als die Lichtgeschwindigkeit. Wir wollen sehen, was geschieht bei einer Berechnung nach den Formeln der Newtonschen Mechanik, wenn die Geschwindigkeit des Planeten die Lichtgeschwindigkeit erreicht.

Das 3. Keplersche Gesetz in der Newtonschen Mechanik kann geschrieben werden in der Form:

$$\omega^2 R^3 = \gamma M_s ,$$

wobei ω die Umlauffrequenz des Planeten ($2\,\pi/\omega$ = Periode), R der mittlere Abstand des Planeten von der Sonne, γ die Gravitationskonstante und M_s die Masse der Sonne sind. Setzen wir für eine kreisförmige Umlaufbahn $\omega = v/R$, wobei v die Bahngeschwindigkeit ist, dann erhalten wir:

$$v^2 R = \gamma M_s \ .$$

Die Geschwindigkeit des Planeten erreicht die Größe der Lichtgeschwindigkeit c also in einem Abstand von der Sonne

$$R \approx \gamma M_s / c^2 \ .$$

Das ist auch eine Abschätzung des Abstandes von der Sonne, bei dem die Effekte der allgemeinen Relativitätstheorie sehr groß werden. Tatsächlich haben wir damit einfach den Radius berechnet, bei dem die erste kosmische Geschwindigkeit (Geschwindigkeit auf einer Kreisbahn) nach den Gesetzen der Newtonschen Mechanik gleich ist der Lichtgeschwindigkeit. Berechnet man die zweite kosmische Geschwindigkeit, was Laplace schon im Jahre 1796 getan hat, dann erhält man:

$$R_s = 2\,\gamma M_s / c^2 \ .$$

Diese Größe spielt in der Relativitätstheorie eine große Rolle, sie erhielt die spezielle Bezeichnung „Gravitationsradius". Sie wird mit

R_{GrS} = 3 km für die Sonne

und analog mit

R_{GrE} = 7 mm für die Erde

berechnet.

Laplace leitete seine Formel ab aus der Gleichheit der potentiellen Energie eines Körpers auf einem Stern $\gamma mM/r$ und seiner kinetischen Energie, berechnet nach der klassischen Formel $mv^2/2$. Nach Gleichsetzen beider Größen kann die Masse m herausgekürzt werden. Weil Laplace annahm, dass das Licht aus Korpuskeln besteht, hat er in die Formel die Lichtgeschwindigkeit eingesetzt und kam zu dem Ergebnis, das er 1798 im zweiten Band seiner Schrift „Erörterung des Weltsystems" darlegte:

„Ein leuchtender Stern mit derselben Dichte wie die Erde und einem Durchmesser von 250 Sonnendurchmessern würde verhindern, dass von ihm Licht zu uns gelangt. Es ist möglich, dass die größten leuchtenden Körper aus diesem Grunde unsichtbar bleiben".

Die Argumentation von Laplace ist natürlich falsch, die Formel für den Gravitationsradius bleibt jedoch dieselbe auch in der allgemeinen Relativitätstheorie. Laplace machte eine der erstaunlichsten Vorhersagen: er begriff, dass „schwarze Löcher" existieren können.

Prüfen wir noch einmal die von Laplace genannte Zahl. Aus der Formel ist ersichtlich, dass der Gravitationsradius proportional der Masse des Körpers wächst. Laplace betrachtete einen Stern mit Erddichte. In diesem Falle nimmt die Sternmasse mit R^3 zu. Dann kann man den Radius eines schwarzen Loches durch den Erdradius ausdrücken:

$$R_L = R_{GrE} \, (R_L/R_E)^3 \,,$$

wobei R_E der Radius der Erde, R_{GrE} ihr Gravitationsradius und R_L der Radius des schwarzen Loches sind. Es folgt

$$R_L = R_E (R_E/R_{GrE})^{1/2} \approx 3 \cdot 10^4 \, R_E \,.$$

Das ist ein Wert von ungefähr 250 Sonnenradien. Bei der Sonne liegt ein Punkt im Abstand ihres Gravitationsradius in der Nähe ihres Zentrums.

In unserem Planetensystem bewegt sich der sonnennächste Planet Merkur in einem Abstand von rund 60 Mio. km von der Sonne. Die Korrektur der Bewegung des Merkur muss von der Größenordnung des Verhältnisses von Gravitationsradius der Sonne zu Abstand des Merkur sein. Diese Größe beträgt $1/20 \cdot 10^{-6}$.

Es gibt zwei Arten von Korrekturen der Bewegung des Merkur, einmal infolge der Massenänderung des Planeten mit der Geschwindigkeit und das andere Mal aufgrund der Änderung des Gravitationsgesetzes.

Die Geschwindigkeit des Merkur ist nach dem 3. Keplerschen Gesetz um einen Faktor 1,7, der Wurzel aus dem Abstandsverhältnis, größer als die Geschwindigkeit der Erde (30 km/s). Seine Geschwindigkeit beträgt also rund 50 km/s oder 1/6000 der Lichtgeschwindigkeit. Korrekturen sind gewöhnlich vom Verhältnis v^2/c^2 abhängig, haben also die Größenordnung $1/36 \cdot 10^{-6}$.

Im Gravitationsgesetz erscheint neben dem gewöhnlichen Term $1/r^2$ ein Term $1/r^3$, was zu einer Korrektur derselben Größenordnung führt. Die letzten astronomischen Beobachtungen der Bewegung des Merkur ergeben eine Übereinstimmung mit den Vorhersagen der Theorie einer Genauigkeit von ungefähr 2 %.

Das Bild der Bewegung des Merkur sieht heute wie folgt aus: Falls es keine anderen Planeten geben würde und die Bewegung nach den Newtonschen Gesetzen erfolgte, dann würde der Merkur eine Ellipse beschreiben. Die mit der Relativitätstheorie verknüpften Effekte würden zu einer Verschiebung des Perihels um 41" in 100 Jahren führen. In Wirklichkeit beträgt die gesamte Verschiebung 575" in 100 Jahren und wird hervorgerufen durch die Wechselwirkung mit den anderen Planeten (auf die Venus entfällt die Hälfte des Effektes). Die Newtonsche Mechanik kann aber nur 534" in 100 Jahren erklären, das übrige geht zu Lasten der Mechanik der Relativitätstheorie.

Vor einiger Zeit wurde die Übereinstimmung von Theorie und Experiment bezweifelt, nämlich als Dicks bemerkte, dass die Schlussfolgerung stark beeinflusst würde, wenn die Sonne auch nur um 10^{-4} abgeplattet wäre ($1+10^{-4}$ ist das Verhältnis der Achsenlängen eines Ellipsoids, falls die Sonne ein Ellipsoid ist). Das würde zu einer Abweichung des theoretischen Wertes um 7" in 100 Jahren führen. Genauere Beobachtungen schließen sogar eine solche geringe Abplattung aus.

Es soll noch daran erinnert werden, dass die Änderung in der Bewegung des Merkur verhältnismäßig gering ist, weil sich der Merkur immer in einem im Vergleich zum Gravitationsradius großen Abstand von der Sonne befindet. In einem Abstand der Größenordnung von 1 – 3 Gravitationsradien (R_{Gr} = 3 km für die Sonne) wäre die Korrektur zum Gravitationsgesetz so groß, dass die Kompensation von Zentrifugalkraft und Anziehungskraft der Sonne gestört würde und der Planet auf die Sonne fallen würde. Für die reale Sonne, deren Abmessung um ein Vielfaches größer ist als ihr Gravitationsradius, existiert ein solcher Bereich nicht. Für schwarze Löcher jedoch erscheint dies sehr wichtig. Darüber aber später.

11 Ablenkung eines Lichtstrahls

In Prinzip ist dieser Effekt einfach. Das an der Sonnenscheibe vorbeigehende Licht muss von ihr angezogen werden, weil ein Lichtquant eine Energie und folglich auch eine Masse besitzt. Die Bewegung im Gravitationsfeld hängt nicht von der Masse des Teilchens ab, das sich in dem Feld bewegt. Deshalb wird Licht im Rahmen der Newtonschen Mechanik auch eine entsprechende Trajektorie beschreiben wie ein Komet, eine Hyperbel. Diese Tatsache wurde schon sehr zeitig bemerkt; schon 1801 sprach man von Trajektorien der Lichtstrahlen. Für die Ablenkung wurde der Wert 0,85" erhalten. Natürlich hat damals niemand die Änderung des Gravitationsgesetzes berücksichtigt. Die richtige Berechnung mittels der Schwarzschildschen Gleichung liefert einen doppelt so großen Wert. Mit einer Genauigkeit von 15% bestätigt das Experiment die theoretische Schlussfolgerung.

Die genauesten Versuche wurden gemacht bei der Messung des Winkelabstandes zweier entfernter Radioquellen, als sie sich in Sonnennähe und einige Monate später weit weg von ihr befanden. Infolge ihrer unterschiedlichen Winkelabstände von der Sonne wurden die Radiowellen der beiden Quellen unterschiedlich abgelenkt. Im Ergebnis dessen registrierte der Beobachter die Änderung ihres sichtbaren gegenseitigen Winkelabstandes. Die Schwierigkeiten der Messung sind hauptsächlich damit verbunden, dass sich zu verschiedenen Jahreszeiten die Beobachtungsbedingungen ändern, wodurch ein Vergleich der Lage der beobachteten Objekte erschwert wird.

12 Uhr im Gravitationsfeld

Die Änderung des Ganges einer Uhr im Feld eines schweren Sterns wird gewöhnlich als dritte Tatsache genannt, welche die allgemeine Relativitätstheorie bestätigt. Die Theorie dieser Erscheinung ist sehr einfach. Wenn wir das Äquivalenzprinzip als richtig anerkennen, dann kann man den Flug eines Lichtquants von einem Stern zum irdischen Beobachter genauso betrachten wie den Flug eines Raumschiffes. Für die Überwindung der Schwerkraft des Sterns muss das Quant Energie aufbringen, welche der potentiellen Energie der Schwerkraft auf der Oberfläche des Sterns gleich ist, d.h. gleich ist der Größe $\gamma\, mM/R$, wobei M und R Masse und Radius des Sterns bedeuten.

Falls wir den Energie-Erhaltungssatz als richtig anerkennen, dann muss sich der Energieverlust des Quants in einer Verringerung seiner Frequenz ausdrücken. Deshalb muss das von massiven Sternen zu uns gelangende Licht eine niedrigere Frequenz haben als dasselbe Licht auf der Erde. Das ist der Effekt der Rotverschiebung (d.h. zu niedrigeren Frequenzen) von Spektrallinien. Infolgedessen erlaubt die Beobachtung der Rotverschiebung eine Überprüfung des Äquivalenzprinzips für Licht.

In diesem Sinne ist die Rotverschiebung ein Effekt, der weniger interessant ist als die Perihelbewegung und die Ablenkung eines Lichtstrahles, welche teilweise (die Lichtablenkung zur Hälfte, die Perihelbewegung zu 2/3) von der Änderung des Gravitationsgesetzes abhängen. Die

Rotverschiebung der erforderlichen Größe wurde im Versuch beobachtet, wenn auch die Genauigkeit der Messung bisher nicht sehr groß ist (ca. 10 %).

Um die Existenz der Rotverschiebung überprüfen zu können, ist es nicht unbedingt nötig, sich um Hilfe an die Astronomen zu wenden. Die Verschiebung von Spektral1inien, allerdings von Kernen und nicht von Atomen, wurde auch auf der Erde beobachtet. Dank der sehr großen Empfindlichkeit der modernen Methoden der Kernspektroskopie bezüglich einer Änderung der Energie von γ-Quanten gelang es Pound und Rebka, den Energieunterschied der γ-Linien des radioaktiven Eisens beim Anheben der Quelle auf eine Höhe von 20 m über der Erdoberfläche zu messen.

Die Energieänderung für eine solche Höhe kann man berechnen nach der Formel: $\Delta E = mgh$ oder mit $E = mc^2$: $\Delta E/E = gh\, c^2$.

Daraus folgt für die relative Änderung der Energie oder der Frequenzen der Wert $2{\cdot}10^{-15}$. Eine solche Verschiebung wurde auch im Experiment beobachtet.

Eine noch augenfälligere Demonstration der Rotverschiebung wurde mit der Erdumrundung durch Flugzeuge erreicht.

Zwei gewöhnliche Linienflugzeuge nahmen Physiker an Bord, welche genaue Atomuhren mit sich führten. Die Flugzeuge flogen in rund 10 km Höhe mit einer Geschwindigkeit von ungefähr 1000 km/h und vollführten in etwa 2 Tagen (mit Zwischenlandungen) eine Erdumrundung. Die Flugzeuge können vom Standpunkt der Relativitätstheorie aus mit dem Planeten Merkur verglichen werden. Während ihrer Flugzeit wurden sie von zwei Erscheinungen beeinflusst. Infolge ihrer Geschwindigkeit und infolge der Erdrotation musste die an Bord befindliche Uhr nachgehen in Übereinstimmung mit der speziellen Relativitätstheorie, infolge der großen Flughöhe musste die Uhr vorgehen aufgrund des Einflusses des geringeren Gravitationsfeldes.

Die Geschwindigkeit von 1000 km/h ist annähernd gleich der Rotationsgeschwindigkeit der Erde, weshalb bei einem Flug nach Westen die erste Erscheinung, das Nachgehen der Uhr, fast kompensiert wurde. Genaue Berechnungen unter Berücksichtigung der Flugroute, der Landungen und der Geschwindigkeitsänderungen während des Fluges ergaben, dass bei einem Flug von West nach Ost die Uhr um 4 ns (1 ns = 10^{-9} s) nachgehen müsste, bei einem Flug von Ost nach West aber 275 ns vorgehen müsste. Das Experiment ergab genau diese Werte. Das war sicherlich die bisher billigste Überprüfung der Relativitätstheorie.

13 Gewicht des Neutrons

Eine schöne Demonstration der Frequenzverschiebung im Gravitationsfeld stellt die Interferenz von Neutronenstrahlen dar. Entsprechend der Quantenmechanik verhalten sich Neutronen wie Wellen. Durch den Beschuss eines Kristalls mit Neutronen kann man den Versuch von Young, die Interferenz zweier Strahlen, mit Neutronen wiederholen. Zu diesem Zwecke wird ein Strahl langsamer Neutronen durch Kristalle, die dabei die Rolle von Prismen und Linsen spielen, in zwei Strahlen aufgespalten. Diese zwei Strahlen interferieren und bilden wie in der gewöhnlichen Optik eine Reihe von Interferenzstreifen unterschiedlicher Intensität. Wenn die Apparatur drehbar ist, dann kann man nach Wunsch die beiden interferierenden Strahlen entweder in einer horizontalen oder in einer vertikalen Ebene führen.

Wenn die beiden interferierenden Strahlen sich in einer vertikalen Ebene befinden, dann haben die Neutronen im oberen Strahl etwas geringere Energie als die Neutronen im unteren Strahl (um den Wert $mg\Delta h$, wobei Δh der Höhenunterschied ist). Im Ergebnis dessen, wie auch beim Versuch mit Licht, tritt ein Frequenzunterschied zwischen oberem und unterem Strahl auf, d.h. die Interferenzstreifen müssen sich verschieben. Das wurde auch im Versuch beobachtet (Overhauser und Colella).

14 „Viertes Experiment“

Die Änderung des Ganges einer Uhr kann man im Prinzip auch verfolgen, indem man die Zeit misst, die ein Signal benötigt, um zu irgendeinem Planeten und zurück zu gelangen. Aufgrund der Gravitationsfelder von Sonne und Planeten muss diese Zeit größer sein als jene, die man nach den Gesetzen der Newtonschen Mechanik berechnet.

Die Verlangsamung des Uhrenganges in Sonnennähe wird vom irdischen Beobachter als eine Verringerung der Lichtgeschwindigkeit wahrgenommen, und die Krümmung des Lichtstrahls in Sonnennähe kann als Brechung in einem Medium betrachtet werden, in dem die Lichtgeschwindigkeit kleiner ist als im Vakuum. Die Verspätung eines von der Venus reflektierten Radiosignals wurde in der Tat beobachtet und ihr Zahlenwert befindet sich in guter Übereinstimmung mit der Theorie (die Genauigkeit betrug erneut 10 %).

Es ist zu bemerken, dass der Vergleich von Theorie und Experiment auf der Grundlage von Etalons (Atomuhren oder Radiolokatoren) erfolgt. Diese Etalons beruhen auf den Gesetzen der Quantenmechanik. Infolgedessen haben wir es mit Versuchen zweier Typen zu tun.

Bei der Messung der Lichtablenkung oder der Perihelbewegung des Merkur benötigen wir keinerlei Quanten-Etalons, bei anderen Messungen benutzen wir sie jedoch. Diese Feststellung werden wir benötigen, wenn wir eine mögliche Änderung der Gravitationskonstanten mit der Zeit erörtern werden.

Es ist sehr interessant, dass es in der Natur nur eine fundamentale Geschwindigkeit gibt und nur eine Wirkungskonstante (die Plancksche Konstante), aber viele verschiedene Längen-Etalons. Am stärksten unterscheiden sich ihrer Natur nach zwei Arten von Längen, nämlich jene, die man aus den Massen von Elementarteilchen erhält (atomare Längen, beispielsweise h/mc) und jene, die man aus den Massen von Planeten erhält – ihre Gravitationsradien (Gravitationslängen).

15 Elektrodynamik und Gravitationstheorie

Die allgemeine Relativitätstheorie entwickelte sich aus dem Versuch, die Erscheinung der Gravitation zu erklären. Das Coulomb—Gesetz über die Wechselwirkung zweier Ladungen und das Gravitationsgesetz über die Wechselwirkung zweier Massen sind einander so ähnlich, dass zu erwarten wäre, dass Gravitationstheorie und Elektrodynamik einander ähnlich sind. Die Übergänge vom Feld einer ruhenden Ladung zum Feld einer bewegten und vom Feld einer ruhenden Masse zum Feld einer bewegten erwiesen sich jedoch als absolut nicht ähnlich. Das Prinzip der Äquivalenz macht die Gravitationsgleichungen den Maxwellschen Gleichungen völlig unähnlich. Vom Standpunkt eines zeitgenössischen Theoretikers aus beruht das darauf, dass das elektromagnetische Feld durch

Vektoren beschrieben wird (Vektorpotential), das Gravitationsfeld aber durch einen Tensor, der die Raumzeit bestimmt. In der Sprache der Quantenmechanik bedeutet das, dass ein Quant des elektromagnetischen Feldes den Spin 1 hat, ein Quant des Gravitationsfeldes aber den Spin 2 (falls alles analog berechnet wird). Dieser auf den ersten Blick geringe Unterschied hat sehr weitreichende Folgen. Die wichtigste besteht darin, dass das elektromagnetische Feld durch Ströme und Ladungen erzeugt wird (diese bilden auch einen vierdimensionalen Vektor). Das elektromagnetische Feld selbst führt keine Ladung mit sich und deshalb kann es auch kein neues Feld erzeugen. Das Gravitationsfeld wird durch Masse erzeugt oder, was dasselbe ist, durch Energie.

Man sagt, dass der (4-dimensionale) Stromvektor die Quelle des elektromagnetischen Feldes ist und der Energie-Impuls-Tensor die Quelle des Gravitationsfeldes darstellt.

Aus den Größen, welche das elektromagnetische Feld charakterisieren, kann kein Stromvektor gebildet werden; aus den Größen, welche das Gravitationsfeld charakterisieren, kann ein Energie-Impuls—Tensor gebildet werden. Das Gravitationsfeld besitzt Energie, das bedeutet, es besitzt auch Masse. Folglich muss das Gravitationsfeld selbst wieder die Quelle eines zusätzlichen Gravitationsfeldes sein. Im elektromagnetischen Feld existiert Superposition, die Felder überlagern sich und bilden ein resultierendes gemeinsames Feld. In einem genügend starken Gravitationsfeld gilt das Prinzip der Superposition nicht. Formal folgt daraus, dass sich die Gleichungen des Gravitationsfeldes als nichtlinear erweisen. Gerade dieser Umstand macht die Theorie des Gravitationsfeldes der Theorie des elektromagnetischen Feldes so unähnlich.

16 Kosmologie

Das alte Weltbild Newtons war nicht sehr folgerichtig. Viele Jahre lang jedoch waren die Physiker beeindruckt von der Größe der physikalischen Idee und von der Leistung der Mathematik und nahmen einzelne Mängel des Modells nicht sehr übel. Die Schwierigkeiten lagen sehr weit entfernt von den gewöhnlichen Maßstäben und es schien, dass gewaltige Abstände und unendliche Zeit diese Schwierigkeiten einst aus dem Weg räumen mussten. Sie haben sich aber immer mehr gehäuft.

Im unendlichen, leeren Raum Newtons existieren die Sternwelten ewig. Wie viele solcher Welten gibt es? Unendlich Viele? Wie sind sie im Raum verteilt? Sie können sich nicht an ein und demselben Ort zu einem Haufen zusammenballen. Die Anziehung hält sie nicht im stabilen Zustand. Allmählich (die Zeit reicht für alles!) erfüllen die Galaxien wie Moleküle eines idealen Gases den gesamten unendlichen Raum. Infolgedessen muss im unendlichen Raum eine unendliche Zahl von Sternen, Galaxien und anderen Objekten vorhanden sein, die überall mehr oder weniger gleichmäßig verteilt sind. Auf diese Weise er- scheint das Newtonsche Weltall als unendliche, gleichförmige Verteilung stofflicher Materie, welche sich nur für uns bei verhältnismäßig geringen Abständen als inhomogen darstellt.

Falls wir jedoch betrachten, was in einem solchen, gleichförmig angefüllten Weltall vor sich gehen muss, dann entdecken wir, dass das Gravitationsfeld in ihm unendlich sein muss. Betrachten wir das Feld in irgendeinem Punkt. Dieser Punkt ist allseitig von stofflicher Materie umgeben. Im Abstand r von ihm befindet sich eine Stoffschicht, deren Masse offensichtlich $\Delta m = 4\pi r2\Delta r\rho$ beträgt, wobei Δr die Schichtdicke und ρ die Dichte des Stoffes sind. Nach dem Newtonschen Gesetz erzeugt diese Masse im Ausgangspunkt ein Feld $\Delta G = 4\gamma\pi\rho\Delta r$. Das bedeutet, dass das von der im unendlichen Raum enthaltenen Materie erzeugte Feld unendlich wird (Beweis durch Integration über r zwischen $r = 0$ und $r = \infty$). Falls eine absolut homogene Massenverteilung vorliegen würde, dann gäbe es natürlich kein Feld (es könnte nirgendwohin gerichtet sein), im Innern einer homogenen Kugelschale ist die Feldstärke gleich Null. Dank der Inhomogenitäten verschwindet das Feld jedoch nicht und es nimmt einen unendlich großen Wert an. Dieses Paradoxon ist schon sehr lange bekannt, es wird als Seeliger-Paradoxon bezeichnet. Die Lösung wurde gesucht in der Abänderung des Gravitationsgesetzes und niemand sah die Katastrophe für die Theorie.

Ein anderes Paradoxon ist ähnlich: es ist verknüpft mit der Helligkeit des Himmels. Falls es unendlich viele Sterne gibt, dann gelangt zu einem beliebigen Beobachter Licht unendlich großer Energie und die Temperatur wird unbegrenzt wachsen. Der Beweis dafür ist ähnlich wie im erstgenannten Beispiel: jeder Stern gibt einen Lichtstrom ab, in dem die Energiestromdichte proportional dem Quadrat des Abstands abnimmt. Die Anzahl der Sterne wächst aber mit dem Quadrat des Abstandes. Daraus folgt ebenfalls, dass die Energieströme unendlich groß werden. Es scheint, als ob die Situation dadurch gerettet werden könnte, dass Licht im interstellaren Medium absorbiert wird. Die Absorption ändert aber nichts am Tatbestand, es wird bloß die interstellare Materie aufgeheizt und ihre Temperatur wächst unbegrenzt. Dieses Paradoxon ist ziemlich wichtig, und man kann es im Rahmen des Newtonschen Weltbildes nicht lösen.

Überhaupt ist die Beschäftigung mit dem Aufbau des Weltalls im Rahmen der Newtonschen Mechanik äußerst undenkbar. Fast jedes Problem führt zur sinnlosen Unendlichkeit.

Im Jahre 1917 veröffentlichte Einstein eine Arbeit, in der er versuchte, an das Problem des Weltalls von der Position der allgemeinen Relativitätstheorie aus heranzugehen. In dieser ersten Arbeit war noch nicht alles in Ordnung. Allgemeine Lösungen der Gleichungen der Kosmologie gab es noch nicht, und Einstein suchte eine solche Lösung, die einem endlichen Weltall entspräche. Vielen gefiel ein solches Ergebnis nicht, und jene, welche die Gesetze der Natur nicht verstanden und auch nicht die Gesetze der Entwicklung der Wissenschaft, beeilten sich, die Schlussfolgerung als sehr kritisch für die gesamte Relativitätstheorie zu erklären.

Einstein behandelte das Modell eines statischen, abgeschlossenen Weltalls. Das war, wie wir heute wissen, ein falsches Modell, aber es lockte die Physiker aus der Reserve heraus und führte zur Geburt einer der phantastischsten Wissenschaften, der relativistischen Kosmologie.

Um die Wahrheit zu sagen, Einstein machte keinerlei Fehler, er behandelte lediglich ein einfaches Modell, das eine wichtige Eigenschaft besaß: In ihm traten keine der oben genannten Paradoxa auf.

Wie kann man auf einfachstem Wege die Unendlichkeit beseitigen, über die wir sprachen? Das Einfachste ist, vorauszusetzen, dass die Welt endlich ist. Jedoch kann das nicht im Rahmen des gewöhnlichen dreidimensionalen euklidischen Raumes gemacht werden; man muss versuchen, eine andere Geometrie zu verwenden. Ein Weg dazu ergab sich mit der Entwicklung der allgemeinen Relativitätstheorie. Bei den schon diskutierten Problemen handelte es sich immer um eine Änderung der Geometrie in der Nähe irgendwelcher großer Massen. Jetzt ist es aber erforderlich, über die Geometrie der Welt als Ganzes zu sprechen. Eine solch ungewöhnlich kühne Fragestellung konnte sich noch niemand erlauben. Es ist klar, dass eine ausführliche Aufklärung der Geometrie weit von uns entfernter Gebiete nicht leicht ist.

Das erste behandelte Modell war das Modell eines im 4-dimensionalen Raum abgeschlossenen Weltalls. Damit man sich vorstellen kann, um was es sich handelt, lassen wir eine Dimension weg und betrachten die Oberfläche einer dreidimensionalen Kugel, also eine zweidimensionale Sphäre. Der zweidimensionale Bewohner einer solchen Sphäre, der Zweidimensionale, kann feststellen, dass er in einer Welt lebt, deren Fläche begrenzt ist. Er kann diese Fläche messen, wie das die Menschen mit der Erdoberfläche taten. Der zweidimensionale kann den Radius der Sphäre messen, wozu er ein Dreieck konstruieren und dessen Winkelsumme bestimmen muss. Er entdeckt, dass die Geometrie seiner Welt die Geometrie einer positiv gekrümmten Oberfläche ist und er kann durch Versuche nachweisen, dass sie sich von der Geometrie der Ebene unterscheidet.

Ungefähr dasselbe können wir im Prinzip in der dreidimensionalen Welt tun, in der wir leben. Die Welt, deren Modell von Einstein behandelt wurde, besitzt Eigenschaften, die sie einer Kugel ähnlich erscheinen lassen. An jeder Stelle dieser Welt beträgt die Winkelsumme eines Dreiecks ein klein wenig mehr als 180°. Alles was der Zweidimensionale bezüglich der Geometrie an jedem Ort der Sphäre entdeckte, wird der Bewohner des Modells an jedem Ort seines dreidimensionalen Raumes entdecken.

Sich das vorzustellen ist nicht schwierig; schwieriger ist es, sich die vierdimensionale Kugel als Ganzes vorzustellen, aber alles, was in einem beliebigen kleinen Bereich ihrer dreidimensionalen Oberfläche vor sich geht, kann leicht beschrieben werden. In einem solchen Modell gibt es keine inneren Widersprüche.

Einzig und allein die Gewohnheit, in Termini des euklidischen, ebenen Raumes zu denken, verleitet uns, über die Kugel so zu denken, als ob sie sich in irgendeinem größeren Raum befände. Noch von der Schulbank her sind wir gewohnt, auf einen geometrischen Körper von außen zu schauen, und wir können uns schwer eine Geometrie von innen her vorstellen, so, wie es der zweidimensionale tun muss.

Vom allgemeinen Standpunkt aus kann man sich kein ernsthaftes Argument gegen ein abgeschlossenes Modell vorstellen. Die Frage danach, was sich außerhalb der Grenzen der vierdimensionalen Kugel befindet, hätte nur dann einen Sinn, falls diese Kugel einem fünfdimensionalen Raum eingepflanzt wäre. Die Anschaulichkeit würde sich dabei nicht erhöhen.

Trotzdem hat ein solch einfaches Modell einen großen Defekt, es erfüllt nicht die Gravitationsgleichungen. Das bedeutet physikalisch, dass, obwohl das Modell endlich ist, die Anziehungskräfte in ihm trotzdem groß sind und die stoffliche Materie in diesem Modell nicht in Ruhe bleiben kann. Ein solches Weltall muss sich zusammenziehen und auf einen Punkt zusammenschrumpfen.

Beim Aufbau eines Modells muss man sich immer daran erinnern, dass die Geometrie durch die Materieverteilung bestimmt wird und dass wir bei vorgegebener Geometrie automatisch die Dichteverteilung der Materie erhalten, die sich keineswegs in Ruhe befinden muss. Das wurde aber erst später, im Jahre 1922, von Friedman verstanden.

Um die Lage zu retten, nahm Einstein an (was die Gravitationsgleichungen zulassen), dass in der Welt ein homogener negativer Druck existiert, der, wie in einem Gas, die Stoffteilchen voneinander wegstoßen lässt. Dieser Druck wird in den Gleichungen durch einen Koeffizienten beschrieben, der den Namen „Kosmologisches Glied“ hielt. Seither hört die Diskussion darüber nicht auf, ob es einen solchen kosmo0logischen Term gibt oder nicht.

Die Lösung des Problems lag jedoch in einer völlig anderen Richtung. Selbst wenn man der Existenz des Kosmologischen Drucks zustimmt, erweist sich das Modell als unbrauchbar. In diesem Modell wird angenommen, dass die Anziehung der Körper genau durch ihre Abstoßung infolge der kosmologischen Konstante kompensiert wird. Ein solches Modell wird jedoch instabil. Falls sich die Dichte an irgendeinem Ort etwas verringert, dann nimmt die Anziehung ab und die Dichte strebt nach weiterer Abnahme. Falls im Gegenteil sich die Dichte erhöht, dann wächst die Anziehung und der Druck kann ein Zusammenziehen der stofflichen Materie nicht verhindern. Deshalb bestand der Krebsschaden des Modells eines isotropen, endlichen Weltalls darin, dass ein solches Modell einfach nicht existieren könnte.

17 Das Modell Friedmans

Die richtige Lösung des Problems der Geometrie des Weltalls gab der Leningrader Mathematiker Friedman. Beim Studium der Gravitationsgleichungen eines homogenen mit Materie angefüllten Weltalls entdeckte er, dass die Lösung dieser Gleichungen nicht stationär ist, d.h. dass sie von der Zeit abhängt. Die Suche stabiler statischer Lösungen erwies sich als fruchtlos, die Anziehung musste durch Bewegung, durch die kinetische Energie der Materie kompensiert werden. Auf diese Weise entstand ein neues Modell des expandierenden Weltalls.

Die Lösung Friedmans kann man wie folgt beschreiben:

Die wesentlichste Eigenschaft besteht in der ununterbrochenen Veränderung aller Abmessungen des Modells. Der Abstand zwischen zwei beliebigen Objekten, beispielsweise zwischen zwei Galaxien, wächst proportional zu sich selbst. Anders ausgedrückt, zwei beliebige Objekte bewegen sich relativ zueinander mit einer Geschwindigkeit, die proportional ihrem gegenseitigen Abstand ist: $v = H \cdot R$. H ist dabei die sogenannte Hubble-Konstante. Aus dieser Größe H und der Gravitationskonstanten γ kann eine Größe aufgebaut werden, die die Dimension einer Dichte hat: $\rho_{kr} = 3H^2/8\pi\gamma$.

Der Charakter der Friedmanschen Lösung hängt ab vom Verhältnis der realen mittleren Stoffdichte im Weltall ρ zu dieser kritischen Dichte ρ_{kr}.

Falls wir das Verhältnis mit Ω bezeichnen, dann ergeben sich verschiedene Lösungen in Abhängigkeit davon, ob Ω Kleiner, größer oder gleich 1 ist.

Falls $\Omega > 1$, dann ergibt sich eine Lösung, die endlich im Raum ist. Genauso wie bei der ursprünglichen Lösung Einsteins wird das Modell durch die Oberfläche einer vierdimensionalen Kugel beschrieben, nur der Radius dieser Kugel wächst mit der Zeit, erreicht einen maximalen Wert und anschließend beginnt eine Kontraktion. Dieses Modell wird das geschlossene Modell Friedmans genannt.

Falls $\Omega < 1$, dann setzt sich die Ausdehnung des Modells unbegrenzt fort; ebenso unbegrenzt wird auch die Materiedichte abnehmen. Das ist das offene Modell Friedmans. Die Geometrie im offenen Modell stimmt mit der Geometrie Lobatschewskis überein.

Ist schließlich $\Omega = 1$, dann setzt sich die Ausdehnung ebenfalls unbegrenzt fort, die Geometrie bleibt aber die gesamte Zeit über euklidisch.

In allen drei Modellen gibt es ein allgemeines Merkmal. Obwohl sie sich in ferner Zukunft völlig verschieden verhalten, haben sie alle einen Anfang. In allen drei Modellen war in der Vergangenheit, die um einen Zeitraum $1/H$ zurückliegt, die Dichte der Materie sehr groß (vielleicht sogar unendlich groß). In allen drei Modellen hatte die Entwicklung des Weltalls einen Anfang. Das ist das wichtigste und am wenigsten erwartete Ergebnis, welches von der relativistischen Kosmologie hervorgebracht wurde.

Wir werden dieses Ergebnis erörtern, nachdem wir gesehen haben, welche experimentellen Tatsachen uns von der Richtigkeit der Friedmanschen Lösung überzeugen, ohne uns dabei von ihrer paradoxen Art beirren zu lassen.

18 Das expandierende Weltall

Das Auseinanderstreben der Galaxien war unabhängig von der Entdeckung Friedmans gefunden worden. Sogar das Gesetz $v = H \cdot R$ war experimentell von Hubble gefunden worden, deshalb wurde auch der Proportionalitätsfaktor H zu Ehren dieses Astronomen benannt. Zu Hubbles Zeiten waren Abstände nur für wenige Objekte am Himmel bekannt. Hubble fand, dass die Linien im Spektrum ferner Galaxien zur roten Seite hin verschoben sind, so, als ob sich die Galaxien vom irdischen Beobachter entfernen würden. Falls man die Linienverschiebung mit dem Doppler-Effekt erklärt, dann kann man die Geschwindigkeit des Objektes berechnen, und wenn man dessen Abstand kennt, kann man eine Beziehung zwischen Geschwindigkeit und Abstand herstellen.

Die Bestimmung der Abstände zu fernen Objekten ist eine sehr delikate Sache. Auf den ersten Blick ist es sogar unverständlich, wie man so etwas prinzipiell durchführen kann. Ist es doch unmöglich, ein Signal zu fernen Galaxien zu senden und zu warten, bis es zurückkehrt. Das würde Milliarden Jahre dauern.

Falls alle Galaxien oder alle Quasare oder alle Galaxienhaufen einander gleich wären, dann könnte man aufgrund der zu uns gelangenden Helligkeit auch ihren Abstand abschätzen. Jedes beliebige Verfahren zur Bestimmung der Abstände fordert unbedingt, dass wir genügend Information über die Natur des Objektes und seine Entwicklung besitzen. Letzteres erweist sich als völlig unmöglich, da Galaxien unterschiedlicher Entwicklungsstufen verglichen werden müssen – eine ferne Galaxis erblicken wir in einem jüngeren Zustand.

Als sich die Kosmologie gerade zu entwickeln begann, in den 30-er Jahren, versuchte man die Abstände abzuschätzen aus der Helligkeitsänderung veränderlicher Sterne eines bestimmten Typs, indem man diese als völlig gleich voraussetzte. Im Ergebnis dessen kam man zu einer Schlussfolgerung, welche die Gegner der allgemeinen Relativitätstheorie ungemein erfreute. Das Alter des Weltalls ergab sich nämlich zu 2 Milliarden Jahren, das ist weniger als das Alter der Erde, welches von den Geologen mit ungefähr 5 Milliarden Jahren angegeben wurde.

Der Fehler lag jedoch nicht an der Theorie, sondern am Verfahren der Abstandsmessung. Tatsächlich ist die Helligkeit veränderlicher Sterne nicht gleichgroß. Heute gibt es andere Verfahren, den Abstand zu fernen Objekten zu bestimmen. Hier ist nicht der Ort, diese Verfahren zu beschreiben, aber man muss die Aufmerksamkeit auf ein sehr wichtiges Argument richten, das ihre Zuverlässigkeit bestätigt: jene Objekte, für die Abstand und Rotverschiebung bestimmt worden waren, lagen sehr gut auf der Geraden, die durch das Gesetz von Hubble beschrieben wird.

Da das Gesetz von Hubble heute bestätigt ist bis zu Geschwindigkeiten, die eine Rotverschiebung von 4,6 hervorrufen (d.h. Vergrößerung der Wellenlänge um das 4,6-fache im Vergleich zur ursprünglichen), kann man wohl kaum eine neue bedeutende Änderung der Abstands-Skala erwarten, es sei denn, dass sich die Astronomen um einen Faktor geirrt haben, der alle Abstände gleichermaßen ändert. Wenn auch eine solche Möglichkeit nicht sehr wahrscheinlich ist, so kann dennoch eine weitere Vergrößerung aller Maßstäbe des Weltalls um das 2- bis 3-fache auch nicht ausgeschlossen werden.

Unter allen Vorbehalten dieser Art kann man den neuesten Wert der Hubble—Konstanten angeben zu

$$H = 55\ km/s \cdot 10^{6} pc.$$

Für diese Konstante wird eine ungewohnte Einheit verwendet, bei der die Geschwindigkeit in km/s und der Abstand in Parsec (pc) gemessen werden (1 pc = 3,26 Lichtjahre = $3{,}09 \cdot 10^{16}$ m). H kann auch in *1/s* ausgedrückt werden. Dann ergibt sich $1/H = 18 \cdot 10^{+9}$ Jahre = $5{,}7 \cdot 10^{+17}$ s. Das ist auch der derzeitige Wert für das Alter des Weltalls.

19 Alter des Weltalls

Alle Modelle eines homogenen und isotropen Weltalls haben eine gemeinsame Eigenschaft, sie haben alle einen Anfang. Sie alle fuhren unabänderlich zu der Schlussfolgerung, dass sich vor ungefähr 20 Mrd. Jahren das Weltall in einem superdichten Zustand, mathematisch sogar in einem Zustand unendlicher Dichte, befand. Selbst diese Schlussfolgerung einer unendlich dichten Materie verletzt nicht die Strenge der Theorie. Formal ist die Gravitationsgleichung richtig für beliebige Stoffdichte und dabei verlieren die Ergebnisse der Theorie nicht ihre Gültigkeit.

In der realen Welt kompliziert sich die Lage natürlich dadurch, dass bei sehr hohen Dichten Quanteneffekte überwiegen, Effekte, die verbunden sind mit der Erzeugung von Elementarteilchen usw. Deshalb wissen wir nicht, was wirklich in jenem Stadium vor sich ging, als die Welt superdicht war. Allerdings erlauben die sich kontinuierlich anhäufenden Beobachtungen zu hoffen, dass man auch diese Frage einmal klären wird.

Viel Zeit wurde verschwendet, zu klären, ob nicht eine Lösung der Gravitationsgleichungen existiert (ohne kosmologisches Glied), welche keine Singularitäten enthält, ob es nicht ein Modell gibt, bei dem die stoffliche Dichte niemals unendlich anwächst. Es ergab sich eine negative Antwort auf diese Frage. Das wurde gezeigt durch die Arbeiten der Engländer Penrose und Hawking und die sowjetischen Physiker Lifschitz, Chalatnikow und Belinski.

Wenn wir vom Alter des Weltalls sprechen, dann muss gefragt werden, was Alter bedeutet und mit welcher Skala wir es messen. Es ist klar, dass ein Jahr, das ist die Zeit für einen Umlauf der Erde um die Sonne, eine Zeiteinheit ist, die dann für die Beschreibung von Ereignissen günstig ist, wenn es sich um Planeten handelt. In der Welt großer Dichte, in der es nur Atomkerne und Elektronen gibt, wird eine natürliche Zeiteinheit mit atomaren Frequenzen verbunden sein; in einer noch dichteren Welt treten Kernfrequenzen in der Form auf, dass sich mit wachsender Dichte die für entsprechende physikalische Prozesse charakteristische Zeit verringert.

wenn das Alter des Weltalls, in irdischen Jahren ausgedrückt, auch endlich ist, so sind in diesem Weltall dennoch unendlich viele Prozesse abgelaufen. Man kann meinen, dass es für das Verständnis der Zeitskala viel natürlicher ist, wenn nicht die Zeit t selbst in unserem heutigen Sinne des Wortes verwendet wird, sondern ihr Logarithmus $lg\ t$. Wenn sich t von 0 auf T (Gegenwart) ändert, dann ändert sich $lg\ t$ von $-\infty$ auf lgT. Beide Zeitskalen sind gleich gut.

20 Materiedichte im Weltall

Um sagen zu können, welches der Modelle Friedmans für die Beschreibung der Entwicklung des Weltalls geeignet ist, muss der Wert der mittleren Stoffdichte bekannt sein. Es ist ziemlich schwierig, diese Größe zu bestimmen, und bisher kennen die Astronomen sie keineswegs zuverlässig. Man kann zusammenrechnen, wieviel leuchtende Materie vorhanden ist. Falls man diese homogen auf das Weltall „verschmiert“, dann erhalten wir für die mittlere Dichte einen Wert der Größenordnung 10^{-31} g cm^{-3}. Damit man sich diese Größe leichter vorstellen kann, sei erwähnt, dass eine Dichte von $1{,}6 \cdot 10^{-30}$ $g \cdot cm^{-3}$ ein einziges Nukleon pro m^3 bedeutet.

Die Lösung des Dichteproblems konzentriert sich auf den schwierig abschätzbaren Anteil an Dunkelmaterie im interstellaren Raum. Man nahm gewöhnlich an, dass diese Materie nur in geringem Umfange vorkommt, jedenfalls nicht mehr ist als die Menge leuchtender Materie.

Vor kurzem begann sich jedoch die Meinung darüber zu ändern. Astronomen aus Tartu (Einasto u.a.) rechnen damit, dass in den Galaxien eine große Menge unsichtbarer stofflicher Materie vorkommen muss, da sonst nicht verstanden werden könnte, warum sich einige Galaxien zusammen mit Begleitern zu einem System gruppieren. Falls ein solcher Standpunkt richtig ist, dann erhöht sich die Abschätzung der mittleren Stoffdichte auf 10^{-30} g cm^{-3}, d.h. auf etwa 1 Nukleon pro m^3.

21 Kritische Dichte

Wie schon gesagt wurde, liefert die Theorie den folgenden Ausdruck für die kritische Dichte, d.h. für eine Dichte, die an der Grenze von offenem und angeschlossenem Modell liegt:

$$\rho_{kr} = 3H^2/8\pi\gamma.$$

Diese Formel kann leicht erhalten werden (natürlich nicht in völlig strenger Form). Zu diesem Zweck werden wir von der Voraussetzung ausgehen, dass in einer Welt mit $\Omega = 1$ die kinetische Energie der stofflichen Materie der potentiellen Energie entspricht, d.h. in einer solchen Welt haben alle Teilchen genau die 2. kosmische Geschwindigkeit. Bei einer größeren Dichte wird dann das Modell zusammenhalten, bei einer kleineren Dichte werden alle seine Teile bis ins Unendliche auseinanderstreben.

Wir legen irgendeinen Koordinatenursprung fest (an beliebigem Ort) und betrachten eine Punktmasse m im Abstand R davon. Die Geschwindigkeit dieser Punktmasse beträgt nach dem Gesetz von Hubble $v = H\ R$. Ihre potentielle Energie bestimmt sich aus der Anziehung einer Kugel des Radius R und der konstanten Massendichte ρ_{kr}:

$$E_{pot} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{kr} \gamma \frac{m}{R} .$$

Durch Gleichsetzen von potentieller und kinetischer Energie

$$E_{kin} = \frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}H^2R^2$$

erhält man die Formel für die kritische Dichte. Mit dem oben angeführten Wert H = 55 km/s·10^6pc erhält man für die kritische Dichte den Wert

$$\rho_{kr} = 5\cdot10^{-30} \text{ g cm}^{-3} \approx 3 \text{ Nukleonen/m}^3 .$$

Damit bestimmt sich der Parameter Ω zu $\Omega = \rho / \rho_{kr} \approx 0{,}3$. Somit erweist sich Ω als ein Wert sehr nahe an 1 und das bedeutet, dass sich unser Weltall durch eine Geometrie beschreiben lässt, die sich nicht sehr von der euklidischen Geometrie unterscheidet.

Diese Tatsache wird vielen höchstwahrscheinlich sehr angenehm sein, da in der euklidischen Geometrie letztlich etwas uns Heimisches und Verwandtes enthalten ist. Trotzdem sollte man sich wundern, dass sich in der Natur gerade diese Möglichkeit realisierte.

Gewöhnlich stellen wir bei der Lösung einer Aufgabe mit Hilfe von Dimensionsbetrachtungen aus den uns zur Verfügung stehenden Größen eine Kombination der benötigten Dimension zusammen und erwarten, dass wir dadurch mit einer Genauigkeit bis auf einen Koeffizienten der Größenordnung 1 die erforderliche Formel erhalten. Dabei nehmen wir an, dass die gesuchte Formel existiert. Bei der einfachen Pendelaufgabe nehmen wir beispielsweise an (oder wir wissen es aus der Mechanik), dass ein Zusammenhang zwischen der Pendellänge, der Beschleunigung durch die Schwerkraft und der Periode besteht. Jetzt machen wir Bekanntschaft mit der umgekehrten Situation. Wir stießen zufällig auf eine Formel mit richtiger Dimension $\rho = \rho_{kr}/3$ und einem Koeffizienten der Größenordnung 1.

Es fragt sich, ob diese Formel irgendeinen tieferen Sinn besitzt. Bisher gibt es auf diese Frage keine Antwort.

22 Änderung der Gravitationskonstanten

Ungefähr auf folgende Weise argumentierte Dirac, als er zu der Schlussfolgerung einer möglichen zeitlichen Änderung der Gravitationskonstante gelangte:

In der Natur existieren zumindest zwei Längen- und Zeit-Skalen. Die eine, die atomare, ist verknüpft mit der Planckschen Konstanten, die andere, die kosmologische, ist verknüpft mit der Hubble-Konstanten. Außerdem gibt es noch eine Skala, welche durch die Geometrie in der Nähe schwerer Körper bestimmt wird und welche mit dem Gravitationsradius dieses Körpers verknüpft ist. Die letztere Skala soll uns jetzt nicht interessieren.

Die atomare Zeitkonstante hat die Größenordnung $T_{at} \approx \hbar/mc^2$, wobei m die Masse irgendeines Elementarteilchens ist. Falls m die Elektronenmasse ist, dann ergibt sich: $T_{at} \approx$ 2·10-21 s.

Wir können eine dimensionslose Größe $T_{at}\cdot H$ bilden und erhalten dafür:

$$T_{at}\cdot H = 2\cdot10^{-21}/6\cdot10^{17} \approx 10^{-39} .$$

In der Natur stoßen wir in der Regel nicht auf so große Exponenten, so dass das Auftreten einer solchen Zahl Verwunderung auslösen muss. Es zeigt sich aber, dass die Sache noch interessanter ist. Die erhaltene Zahl liegt nämlich größenordnungsmäßig sehr nahe dem Verhältnis von zwei Arten von Kräften, die zwischen Proton und Elektron wirken, dem Verhältnis von Gravitationskraft und Coulombkraft:

$$\gamma \frac{mM}{r^2} : \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{4\pi\varepsilon_0 \gamma mM}{e^2} \approx 10^{-42} \, .$$

Falls wir etwas andere Massenwerte ausgewählt hätten, dann wurde sich das Verhältnis um 2 – 3 Größenordnungen ändern, aber trotzdem würden sich die beiden Zahlen nicht sehr voneinander unterscheiden. Ist das eine zufällige Koinzidenz oder ein Naturgesetz, dessen Sinn wir nicht verstehen?

Nehmen wir an, dass eine zufällige Koinzidenz sehr unwahrscheinlich ist und das wir auf eine reale Gleichheit zwischen Größen, welche die Entwicklung des Weltalls bestimmen, und Konstanten des Mikrokosmos gestoßen sind.

Wir setzen die beiden Größen einander gleich und formen den Ausdruck so um, dass ein dimensionsloser Faktor entsteht:

$$4\pi\varepsilon_0 \gamma mM/e^2 \approx \hbar H/mc^2$$

oder

$$\frac{\gamma mM}{\hbar c} \approx \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c} \cdot \frac{\hbar H}{mc^2} \, .$$

Wir unterstreichen nochmals, dass die Massen von Proton und Elektron willkürlich ausgewählt worden sind. Vielleicht muss in der Formel die Masse des Pions stehen, welche die Reichweite der Kernkräfte bestimmt?

Wir haben keine weiteren Bemerkungen zu machen, und alles, was uns zu tun übrigbleibt, ist Zahlenspielerei.

Die erhaltene Formel ist dadurch interessant, dass sie die Konstante *H* enthält, die sich mit der Zeit ändert (*1/H* ist das Alter des Weltalls, d.h. eine mit der Zeit zunehmende Größe). Die übrigen Größen sahen wir bisher als universelle Konstanten an. Falls die Formel Anspruch auf Realität erhebt, dann bedeutet das, dass sich eine der fundamentalen Konstanten in Wirklichkeit im Laufe der Entwicklung des Weltalls ändern muss.

Wir können mit Bestimmtheit sagen, dass sich $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c}$ seit 10^{10} Jahren nicht geändert hat. Diese kühne Behauptung folgt aus der Identität der Struktur von Spektren irdischer Objekte und solcher, die sich in einem Abstand von uns von Milliarden Lichtjahren befinden. Beide werden durch dieselben Feinstrukturlinien charakterisiert, d.h. durch dieselbe Wechselwirkung zwischen dem Spin- und Bahnmoment des Elektrons. Infolgedessen können wir schlussfolgern, dass sich nur die Gravitationskonstante γ ändern kann. Natürlich hat es keinen Sinn zu fragen, was sich wirklich ändert, γ oder die natürlichen Maßeinheiten, die mit den Massen verknüpft sind. Selbstverständlich nehmen wir an, dass alle Messungen auf atomare Etalons normiert werden, welche wir nach Definition als unveränderlich annehmen.

Unter diesen Voraussetzungen ergibt sich aus der erhaltenen Formel die Schlussfolgerung, dass sich die Gravitationskonstante (in atomaren Einheiten gemessen) mit H ändern muss, d.h. dass sie proportional zum Alter des Weltalls abnehmen muss.

Die Formel, die praktisch erraten wurde, kann experimentell überprüft werden! Die modernen Geräte zur Planetenbeobachtung und die Möglichkeiten der Rechentechnik erlauben mit großer Genauigkeit die Analyse des Verhältnisses von beobachteten und durch die relativistische Himmelsmechanik vorausgesagten Werten (es entsteht auch eine solche Wissenschaft). Es zeigte sich, dass die Genauigkeit solcher Werte zu sagen erlaubte, dass im Falle einer Änderung von γ deren relative Größe 10^{-10} pro Jahr nicht übersteigen kann. Da sich H um $1/2 \cdot 10^{-10}$ pro Jahr ändert, können bisher noch keinerlei Schlussfolgerungen gezogen werden.

Vor kurzem, Anfang 1975, wurden die Ergebnisse der Analyse der Beobachtungen von Sternbedeckungen durch die Mondscheibe der letzten 20 Jahre mitgeteilt. Aus ihnen folgt, dass sich γ im Jahr um etwa $(6 \pm 2) \cdot 10^{-10}$ seines Wertes ändert. Diese Zahl stimmt mit der Änderung von H überein, wie das nach der Diracschen Formel auch sein muss. In solch unerwartete Richtungen entwickelt sich manchmal die Wissenschaft. Es fällt einem die Vorstellung schwer, dass sich das Alter des Weltalls und seine Entwicklung in einer Änderung der fundamentalen Konstante γ ausdrücken soll. Wir warten mit unseren Schlussfolgerungen deshalb lieber ab, bis dieser Fakt noch zuverlässiger bestätigt wird.

23 Reliktstrahlung

Die glänzendste Bestätigung der Hypothese über ein sich ausdehnendes Weltall und seine Entwicklung aus einem Zustand großer Dichte erhielten die Radioastronomen, als sie im Jahre 1965 ungewöhnlich starke Signale nahe der Wellenlänge von 7,4 cm entdeckten. Die anschließenden Untersuchungen zeigten, dass in diesem Bereich ein ganzes Strahlungsspektrum existiert, dessen Herkunft auf keinerlei sichtbare Quellen zurückgeführt werden kann.

Die Existenz eines solchen Spektrums folgt jedoch aus allgemeinen Überlegungen, falls sich das Weltall aus einem superdichten Zustand entwickelte. Anfangs waren in einem solchen System Dichte und Temperatur sehr groß. Es liefen Prozesse der Bildung und Vernichtung von Teilchen ab, die Teilchen tauschten gegenseitig Energie aus. Aber bei der Ausdehnung des Weltalls sank die Temperatur, und die Bildung von Teilchen hörte auf. Die bei hohen Temperaturen leicht ablaufenden Prozesse erstarben praktisch. Der Wärmeaustausch zwischen verschiedenen Bereichen des Weltalls verschlechterte sich. Als die Dichte des Weltalls so weit abgesunken war, dass sich die Energie aller Teilchen auf einige keV verringert hatte, konnten die Photonen fast keine Energie mehr durch Ionisation von Atomen verlieren und waren praktisch isoliert wie in einem Thermostaten. Das bedeutet, dass die Photonen eine „Erinnerung“ an jene Temperatur behielten, die sie während der früheren Periode hatten, als sie aufhörten, mit dem Atomen zu wechselwirken (deshalb werden sie auch als Reliktstrahlung bezeichnet).

Das Weltall setzte aber seine Ausdehnung fort, mit der Ausdehnung wuchs auch die Wellenlänge der Photonen. Die Energie der Photonen verringerte sich weiter, jetzt aber schon nach anderen

Gesetzen, die nicht von der Temperatur der umgebenden stofflichen Materie abhängen. Dabei blieb das Spektrum der Photonen das Spektrum einer Gleichgewichtsstrahlung, in der die Temperatur nach demselben Gesetz sank, nach welchem die Energie der Photonen abnahm, so dass das Verhältnis $\hbar\omega/kT$, welches die Form des Photonenspektrums bestimmt, sich nicht änderte. Ein solch ungewöhnliches Bild eines Photonengases, welches homogen das gesamte Weltall ausfüllt, hatten die Theoretiker vorausgesagt (Gamow). Es wurden fast 30 Jahre für die Bestätigung dieser Vorhersage benötigt.

Man kann sich nur wundern, wie viele verschiedene Voraussagen in früheren Etappen der Entwicklung der Relativitätstheorie gemacht worden waren. Sie wurden gemacht, als selbst der Gedanke an ihre experimentelle Überprüfung sinnlos schien. Sie wurden nur von Wenigen beachtet. So war es auch mit der Reliktstrahlung. Sie war fast völlig vergessen worden, als aber die Beobachtungen erste Hinweise auf ihre Existenz lieferten, konnten das viele nicht glauben.

Solange die Beobachtungen nur Messpunkte auf der langwelligen Seite des Maximums lieferten, blieb das Plancksche Spektrum unbewiesen. Doch heute liegen genügend experimentelle Werte vor, so dass man mit Bestimmtheit sagen kann, dass das Weltall mit einem idealen Photonengas ausgefüllt ist (ca. 10^{+3} Photonen pro cm^3), das einer absoluten Temperatur von 2,8 K entspricht. Dieser Wert stimmt auch gut mit den theoretischen Abschätzungen überein. Kann man ein besseres Argument zugunsten der Friedmanschen Lösung erwarten?

24 Absolutes Koordinatensystem

Die Existenz der Reliktstrahlung bietet im Prinzip die Möglichkeit der Bestimmung eines Koordinatensystems, das man mit vollem Recht als das am ausgeprägtesten „inertiale" bezeichnen kann. Da sich das Weltall entwickelt, gibt es in ihm keine vollständige Homogenität der Zeit. In ihm gibt es auch keine Homogenität des Raumes, da ein Beobachter die in unterschiedlichen Abständen befindlichen Objekte in verschiedenen Entwicklungsstadien erblickt (selbst mit unterschiedlicher Rotverschiebung). Insbesondere ist dies am Spektrum der Reliktstrahlung erkennbar. Ein Gleichgewichtsspektrum ist nicht dem Relativitätsprinzip unterworfen: jeder der Beobachter, die sich mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten bewegen, misst infolge des Doppler-Effekts seine eigene, von den anderen unterschiedliche Spektrenform. Deshalb können die in unterschiedlichen Gebieten des Weltalls befindlichen, miteinander nicht in Kontakt tretenden Beobachter feststellen, dass sie sich alle beispielsweise relativ zur Reliktstrahlung in Ruhe befinden, falls sie alle eine Gleichgewichtsform des Spektrums messen. Umgekehrt kann man aus der Abweichung der Form des Spektrums von der Gleichgewichtsform die absolute Geschwindigkeit der Bewegung des Beobachters ermitteln.

Solche Experimente wurden auf der Erde ausgeführt. Indem die Dopplerverschiebung des Spektrums gemessen wurde, konnte festgestellt werden (anscheinend noch nicht völlig zuverlässig), dass sich die Erde zusammen mit dem gesamten Sonnensystem mit einer Geschwindigkeit von ungefähr 300 km/s in Richtung des Sternbildes der Jungfrau bewegt.

25 Machsches Paradoxon

Wir müssen noch einmal zum Paradoxon mit der rotierenden Kugel zurückkehren. Das Paradoxon besteht darin, dass es schwer verständlich scheint, relativ wozu die Kugel rotiert und warum auf ihr Trägheitskräfte auftreten. Mach dachte, dass diese Kräfte mit den Sternen in Verbindung stünden, eine Idee, die natürlich von Kepler stammte.

Wie auch bei jedem anderen Paradoxon gibt es in den Überlegungen einen direkten Fehler. Das Paradoxon würde existieren und eine Herausforderung an die Physik bedeuten, wenn man die rotierende Kugel als mit nur einem kleinen Raumgebiet verbunden betrachten könnte. In Wirklichkeit ist die Kugel vom eigenen Gravitationsfeld umgeben, von dem wir keinesfalls absehen dürfen, wenn wir uns über die Trägheitskräfte klar werden wollen. Des weiteren darf man nicht eine Kugel betrachten, die schon immer rotiert, beginnend mit $t = -\infty$, da es einen solchen Zeitpunkt einfach nicht gab, sondern man muss annehmen, dass sie zu einem bestimmten Zeitpunkt $t=0$ zu rotieren begann (für das Paradoxon ist das sehr wichtig!).

Zu diesem Zeitpunkt besaß die Kugel ein statisches Feld, das den gesamten Raum ausfüllte. Als die Kugel sich zu drehen begann, änderte sich das Feld infolge der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit der Gravitation in großen Abständen später als in geringen. Man kann immer einen solchen Abstand finden, bis zu dem im gegebenen Zeitpunkt die Information über die rotierende Kugel noch nicht gelangt ist. Infolgedessen rotiert die Kugel nicht relativ zu irgendeinem Beobachter (welche Verknüpfung zwischen einem solchen Beobachter und den Trägheitskräften könnte man angeben?), sondern relativ zu ihrem eigenen Gravitationsfeld in großem Abstand. Wenn die Kugel zu rotieren beginnt, dann rotiert das Feld in komplizierter Weise, analog dem Strahl eines Projektors, welcher sich im Koordinatenursprung dreht. Ein solches Drehfeld und das ihm im rotierenden Koordinatensystem äquivalente Feld der Trägheitskräfte ist mit der Kugel verknüpft.

In derselben Art löst sich das Paradoxon mit der Ladung, die sich in einem fallenden Lift befindet. Das Paradoxon besteht darin, dass diese dem Äquivalenzprinzip gehorchende Ladung nicht strahlen darf. In diesem Problem ist dieselbe Fragestellung enthalten: Relativ wozu wird die Ladung beschleunigt? Und wieder ist es unverständlich, welche Beziehung ein Beobachter auf der Erde (im Inertialsystem) zur Strahlung der Ladung hat. Man muss genauso argumentieren. Als der Lift zu fallen begann, blieb das elektromagnetische Feld im Unendlichen in Ruhe (natürlich außerhalb des Liftes, worin sich auch die Dislokalität ausdrückt). Das sich beschleunigende Elektron dehnt in gewissem Sinne das Feld, deformiert es. Falls die Beschleunigung sehr groß ist, entweicht das Elektron gleichsam seinem Eigenfeld. Natürlich erfolgt auf eine solche Störung eine Reaktion, das Elektron strahlt, ein Teil der Energie, die zur Wiederherstellung des gestörten Feldes verwendet wird, verlässt das System. Die Beschleunigung des Elektrons ist demnach tatsächlich eine absolute: Das Elektron wird relativ zum eigenen Feld beschleunigt. Beim irdischen Beobachter tritt etwas Analoges nicht auf. Die Ladung in seinen Händen befindet sich relativ zu ihrem Feld die ganze Zeit über in Ruhe und die Tatsache, dass vom Standpunkt des Beobachters im Lift aus diese Ladung beschleunigt wird, hat keinerlei Beziehung zur physikalischen Aufgabenstellung. Die beiden Beispiele demonstrieren gut, wie sorgfältig man bei beschleunigten Objekten vorgehen muss und wie einfach sich dann alle Paradoxa lösen. Bisher gelang es niemandem, eine so logisch aufgebaute Theorie, wie sie heute die Relativitätstheorie vorstellt, in Verlegenheit zu bringen. Ihre schwierigen Stellen und möglichen Paradoxa sind seit langem bekannt, wenn es auch nicht immer leicht ist, ihre Lösung zu erkennen.

26 Uhrenparadoxon (Zwillingsparadoxon)

Da wir uns gerade über Paradoxa unterhalten, kann man noch das Paradoxon der Uhr behandeln, welches ein beliebtes Argument gegen die Relativitätstheorie war.

In der Tat, so sprachen die Opponenten, falls sich ein Reisender von der Erde entfernt und sich eine gewisse Zeit lang mit großer Geschwindigkeit bewegt, so findet er nach seiner Rückkehr auf die Erde deren Bewohner stark gealtert vor, weil die Zeit im bewegten Koordinatensystem langsamer abläuft. Vom Standpunkt des Reisenden aus bewegte sich aber die Erde, warum also alterten ihre Bewohner? In anderer Form wurde dieselbe Frage von Eddington gestellt. Er drückte das folgendermaßen aus: Wenn ich nach Edinburgh fahre, dann bin ich infolge der schlechten Straße sehr ermüdet und finde bei meiner Ankunft die Edinburgher frisch und ausgeruht vor. Warum sind sie nicht ermüdet, da sie mir doch entgegenkamen? Der Leser versteht natürlich, um was es sich handelt.

Die Beschleunigung ist nicht relativ. Der Übergang in ein Nichtinertial-System führt zum Auftreten von Gravitationsfeldern. Deshalb gerät der Erdebewohner im Moment der Umkehr des Reisenden auf die Rückkehrbahn in den Einfluss eines starken Gravitationsfeldes, das eine Blauverschiebung, eine Beschleunigung des Gangs der Uhr bewirkt (wie im Versuch mit dem radioaktiven Eisen auf einem Turm). Diese Verschiebung kompensiert vollständig den Effekt der Verlangsamung von Uhren bei deren gleichförmiger Bewegung. Es ist nicht einmal nötig, ausführliche Berechnungen anzustellen, denn die Formeln der Relativitätstheorie sind so, dass sie automatisch ein und dieselbe Antwort geben unabhängig davon, in welchem Koordinatensystem die Berechnungen ausgeführt wurden.

Manchmal wird bezweifelt, ob der Reisende nach seiner Rückkehr wirklich jünger aussehen wird und ob er feststellen wird, dass seine Kinder älter geworden sind als er. Selbstverständlich muss man sich biologischen Prozessen gegenüber sehr vorsichtig verhalten; es ist klar, dass der Effekt der Überbelastung bei Beschleunigung und die Verhältnisse während des Fluges vielleicht auch von Bedeutung sind. Deshalb sollte man möglichst keine biologischen Beispiele wählen. Weil aber die biologischen Prozesse in den Zellen mit elektrischen Feldern und atomaren Prozessen verknüpft sind, die den Gesetzen der Relativitätstheorie gehorchen, gibt es keinen Grund, daran zu zweifeln, dass die elementaren Reaktionen, der Theorie folgend, auf Übergänge in verschiedene Systeme reagieren werden. Die Frage ist nur, ob das der Haupteffekt sein wird.

Wenn jemand im Auto auf einer schlechten Straße durchgeschüttelt wird, dann springt und fällt von seinem Standpunkt aus alles um den Wegen herum Befindliche. Die Edinburgher springen dabei mit derselben Beschleunigung wie ihre Umgebung, weshalb sie darüber auch nicht beunruhigt sind. Die „springende“ Straße rüttelt und schüttelt jedoch den Wagen, und gerade das gefällt dem vernunftbegabten Passagier nicht. Aus demselben Grunde fallen Koffer aus dem Gepäcknetz, wenn der Zug an einer Haltestelle plötzlich bremst, und man braucht sich nicht zu wundern und zu fragen, warum die auf dem Bahnsteig Wartenden den Stoß nicht spürten.

Beachten Sie genau: es gibt einen Unterschied der Beschleunigung von Zug und Koffer, aber es gibt ihn nicht für die Wartenden auf dem Bahnsteig und den Bahnsteig selbst. Aus diesem Beispiel ist der Unterschied zu erkennen.

Es soll nochmals wiederholt werden, dass der mathematische Apparat der Theorie von Anfang an so ausgewählt wurde, dass die berechneten Ergebnisse sich als koordinaten-invariant erweisen. Die Suche nach Widersprüchen in den Formeln der Theorie ist heute eine ebenso unfruchtbare Beschäftigung wie der Versuch, im euklidischen Raum ein Quadrat zu finden, dessen Diagonalen nicht senkrecht aufeinander stehen. Heute erkennen wir, wie hilflos alle Versuche waren, auch in der Relativitätstheorie Widersprüche zu finden.

27 Gravitationswellen

Es wird von wenigen bezweifelt, dass sich Gravitation mit endlicher Geschwindigkeit ausbreitet und dass diese Geschwindigkeit gleich der Lichtgeschwindigkeit ist. Trotzdem wurde diese fundamentale Tatsache bisher nicht durch das Experiment bestätigt. Es wer der natürliche Wunsch der Physiker, Gravitationswellen zu entdecken, die den elektromagnetischen (Radio-)Wellen ähnlich sind, die von beschleunigten Ladungen ausgestrahlt werden. Zwei Umstände machen ein solches Experiment schwierig.

Der erste Umstand ist offensichtlich: die Gravitationswechselwirkung ist viel schwächer als die elektromagnetische und kann deshalb nur schwierig nachgewiesen werden.

Der zweite Umstand muss ausführlicher erläutert werden: Wir wollen einmal ein System zweier Elektronen betrachten. Ein solches System strahlt bedeutend schwächer als ein System von Elektron und Positron oder ein System aus Positron und Proton. Es zeigte sich, dass für ein System, dessen Teilchen alle dasselbe Verhältnis von Ladung zu Masse besitzen, die Intensität der Strahlung stark abnimmt, ungefähr um den Faktor $(\lambda/a)^2$, wobei λ die Wellenlänge der Strahlung und a die Systemabmessung sind.

Das geschieht deshalb, weil in einem solchen System der Schwerpunkt mit dem Ladungsmittelpunkt zusammenfällt und es sich fast wie eine unbewegte Ladung verhält. Im Falle der Gravitationsstrahlung haben alle Teilchen ein und dasselbe Verhältnis von „Gravitationsladung“ zur Masse (eine Folge des Äquivalenzprinzips), und deshalb ist diese Strahlung in jedem System eine Quadrupolstrahlung.

Es ist sehr schwierig, eine Quelle von Gravitationsstrahlung künstlich herzustellen; vorläufig werden große Hoffnungen auf kosmische Ereignisse gesetzt. Ein solches Ereignis kann beispielsweise die Bildung eines schwarzen Loches sein. Auch Doppelsterne müssen Gravitationswellen abstrahlen. Die Intensität dieser Strahlung ist jedoch klein. Man kann die Beziehung für die Strahlungsintensität eines Systems zweier sich um den gemeinsamen Schwerpunkt bewegender Massen m_1 und m_2 vom Abstand r und der Umlauffrequenz ω herleiten. Der durch Ausstrahlung von Gravitationswellen verursachte Energieverlust pro Zeiteinheit bestimmt sich zu

$$L = \frac{32}{5}\frac{\gamma}{c^5}\, r^4 \omega^6 \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 .$$

Für den Jupiter liefert diese Formel $5{,}7\cdot 10^{+3}$ J/s (zum Vergleich: die Lichtausstrahlung der Sonne beträgt $4\cdot 10^{+26}$ J/S).

Für typische Doppelsterne beträgt die Ausstrahlung größenordnungsmäßig 10^{+24} J/s (Doppelstern UV im Sternbild des Löwen). Infolge des großen Abstandes zur Erde (ca. 200 Lichtjahre) erweist sich jedoch der Energiestrom auf die Erde mit $3{,}5 \cdot 10^{-19}$ J/s cm^2 als außerordentlich klein. Der Nachweis der Gravitationsstrahlung eines Doppelsterns ist eine ungewöhnlich schwere Aufgabe.

Vor einigen Jahren wurden Mitteilungen darüber veröffentlicht, dass Wellen registriert wurden mit einer Intensität, welche die optimistischsten Vorhersagen um ein Vielfaches übertrafen. Sorgfältigste Überprüfungen in verschiedenen Laboratorien (darunter auch im Laboratorium W.E. Braginskis in Moskau) bestätigten diese Entdeckung nicht. Die Gravitationswellen bleiben den Experimentatoren weiterhin unbekannt. Unterdessen spielen sie ihre Rolle bei der Entwicklung des Weltalls insofern, als sie ohne jegliche Quellen existieren und die sich zeitlich ändernde Geometrie des Weltalls beschreiben gönnen. Im Unterschied zu elektromagnetischen Wellen wechselwirken Gravitationswellen miteinander, und man kann sich vorstellen, dass sie in früheren Etappen der Evolution die Entwicklung der Ereignisse beeinflussen konnten.

28 Schwarze Löcher

Wir gehen jetzt über zur Beschreibung einer Geschichte, die voller Hoffnungen und Enttäuschungen ist. Dabei handelt es sich um die wunderlichste Erscheinung, an die bis zur Entdeckung der Relativitätstheorie selbst der ungestümste Phantast nicht hätte denken können.

Ein Loch im Himmel – das Tor zu einer Welt, aus der es keine Rückkehr gibt – all des klingt wirklich düster, beschreibt aber richtig jene Ereignisse, welche in der Nähe eines schwarzen Loches vor sich gehen, wenn solche irgendwo existieren.

Über einen Stern, der sein Licht nicht aussendet, schrieb, wie schon berichtet, Laplace zu Ende des 18. Jahrhunderts. Er war der wahre Nachfolger Newtons und meinte, dass das Licht aus feinsten Korpuskeln besteht. Wenn wir uns deren erinnern, dass die Fallgesetze von Körpern nicht von der Masse des Körpers abhängen, dann kann man verstehen, warum Laplace annahm, dass die Formel für die minimale Geschwindigkeit, welche ein Körper haben muss, um die Erdanziehung zu überwinden (2. kosmische Geschwindigkeit), auch für die Lichtteilchen gilt. Die Formel für die 2. kosmische Geschwindigkeit lautet:

$$v^2 = 2\,\gamma \frac{M}{R}\,.$$

Wenn wir in dieser Formel *v* durch die Lichtgeschwindigkeit *c* ersetzen, dann erhalten wir ein Verhältnis zwischen der Masse eines Sterns und seinem Radius, bei dem das Licht die Anziehungskraft noch überwinden und vom Stern zu einem entfernten Beobachter gelangen kann.

Erinnern wir uns noch an den Gravitationsradius $R_{Gr} = 2\gamma M/c^2$, so gelangen wir zu der Schlussfolgerung, dass ein Stern mit einem geringeren Radius als seinem Gravitationsradius kein Licht aussenden kann.

Die strenge Ableitung nach allen Regeln der allgemeinen Relativitätstheorie liefert dasselbe Resultat (sogar mit demselben Faktor 2). Inzwischen war aber die Vorhersage von Laplace vergessen worden und die moderne Etappe der Geschichte begann in den 30-er Jahren, als man entdeckte, dass eine sehr schwere Kugel den eigenen Gravitationskräften nicht standhalten kann und sich bis auf ein sehr kleines Volumen zusammenzieht, ganz genauso wie ein abgeschlossenes Weltall während der Etappe der Kontraktion. Ob es wirklich solche verschwindenden Sterne gibt, darauf konnte damals niemand antworten.

Allmählich begann sich die Frage aufzuklären. Wenn ein Stern im Prozess seiner Entwicklung erkaltet, dann verkleinert er durch Kontraktion sein Volumen, weil die langsamen Moleküle dem Schwerefeld des Sterns nicht entgegenwirken können. Der Druck im Stern wächst, und falls die Sternmasse nicht sehr groß ist (d.h. höchstens von der Größenordnung der Sonnenmasse), dann nimmt die Dichte bei der Kontraktion so sehr zu, dass sich die Atome gegenseitig berühren und die weitere Kontraktion verhindert wird. Der Stern beendet seine Existenz in der Form eines weißen Zwergs, eines kalten Klumpens ohne irgendwelche effektiven Eigenschaften. Ein solches Schicksal erwartet auch unsere Sonne.

Die Geschichte wird interessanter, falls der Stern eine Messe besitzt, die etwas größer ist als die Sonnenmasse. Dann wird das Schwerefeld so groß, dass die Atomhüllen durch auftreffende Teilchen zerstört werden, die Elektronen vom Kern aufgenommen werden, und vom gesamten Stern bleibt eine relativ (im Vergleich zu unserer Erde) kleine Kugel übrig, die nur aus Neutronen besteht. Es entstehen Pulsare, deren Existenz 1933 von Baade und Zwicky und 1934 von Landau vorausgesagt worden war. Diese Voraussage, so schon sie auch war, gab wenig Hoffnung auf eine reale Entdeckung von Neutronensternen. Wie konnte man von einer Beobachtung eines so kleinen und eines so kalten Objekts sprechen? In der Natur kann sich jedoch nichts verstecken. Der Neutronenstern ist umgeben von einem sehr starken Magnetfeld, welches seine Röntgenstrahlung fokussiert. Außerdem rotiert der Neutronenstern, so dass der Beobachter auf der Erde periodisch

(mit einer Periode von gewöhnlich 1 - 2 s) in die Ebene gerät, in der seine Strahlung gesammelt ist. Die Pulsare haben keine direkte Beziehung zur allgemeinen Relativitätstheorie, und wir werden über sie nicht weiter sprechen. Es ist jedoch nützlich, auf eine Eigenschaft der Pulsare hinzuweisen. Die Periode des „Aufblitzens“ eines Pulsars bleibt mit einer ungewöhnlich hohen Genauigkeit konstant. Einige Pulsare können die Zeit mit der Genauigkeit einer Präzisionsuhr reproduzieren. Die Perioden solcher Pulsare wurden bis auf die 9. Stelle nach dem Komma gemessen. Im Weltall sind also überall sehr genaue originelle Uhren aufgehängt.

Falls jedoch ein Stern schwerer als 2 - 3 Sonnenmassen ist, dann können auch die Neutronen dem Druck nicht mehr standhalten. Der Stern setzt seine Kontraktion fort, bis seine letzten Teile für den äußeren Beobachter hinter dem Gravitationsradius verschwunden sind. Was das alles bedeutet, wollen wir ausführlicher zu erklären versuchen.

29 Schwarzschildsche Lösung

Kehren wir zur Bewegung im Feld einer Punktmasse zurück. In der alten Newtonschen Mechanik wurde die Bewegung eines Teilchens in einem solchen Feld durch die Keplerschen Gesetze beschrieben. Was es auch für ein Teilchen sein mochte, mit ihm konnte nur eine von zwei Möglichkeiten realisiert werden: falls seine Energie groß ist, dann verlässt das Teilchen das Feld und fliegt weg in die Unendlichkeit; falls seine Energie gering ist, dann wird es um das Feld kreisen auf einer der möglichen Bahnen, einer elliptischen oder auf einer Kreisbahn. Das Teilchen kann keinesfalls auf die Zentralmasse fallen, das könnte nur dann passieren, wenn es sich auf einer

Geraden bewegt, welche durch das Zentrum des Feldes hindurchgeht. Dafür muss sein Drehimpuls genau gleich Null sein.

Wir wissen schon, dass das reale Anziehungsgesetz von der Proportionalität umgekehrt zum Quadrat des Abstands abweicht und dass sich die Planetenbewegung von derjenigen der Newtonschen Mechanik so unterscheidet, als ob im universellen Gravitationsgesetz ein Term proportional zu $1/r^3$ vorhanden wäre. Eine solche Beschreibung gilt nur näherungsweise, sie zeigt jedoch, wie sich die Aufgabe kompliziert, wenn man die mit der Re1ativitätstheorie verbundenen Effekte in Rechnung setzen muss. Die zu $1/r^3$ proportionalen Kräfte können offensichtlich bei genügend kleinen Abständen die Zentrifugalkräfte beliebig übersteigen. Deshalb müssen wir in einem solchen Feld einen wesentlich anderen Bewegungs-Charakter von Teilchen erwarten, die in einen Bereich in der Nähe des Kraftzentrums geraten.

Tatsächlich kann sich ein Teilchen im Feld einer Zentralmasse bei Abständen, die kleiner als der Gravitationsradius sind, nicht stabil auf einer kreisförmigen Bahn bewegen. Falls das Teilchen dabei einen nicht zu großer Drehimpuls und nicht zu große Energie besitzt, dann kann es nicht in die Unendlichkeit entweichen und wird eine offene Trajektorie in Form einer Spirale beschreiben, die sich mit jeder Windung mehr und mehr dem Zentrum nähert. Auf irgendeiner Windung schneidet das Teilchen den Zentralkörper, damit wird seine Geschichte beendet, das Teilchen fällt ins Zentrum.

Bei einer solchen Bewegung erhöht sich die Geschwindigkeit des Teilchens, wobei der Drehimpuls erhalten bleibt und die sich verringernde potentielle Energie in wachsende kinetische Energie übergeht. Falls der Zentralkörper größer ist als sein Gravitationsradius, dann gib es praktisch keine solche Bahnen. Falls jedoch, wie eben beim schwarzen Loch, die gesamte Masse des Zentralkörpers in Abständen konzentriert ist, die kleiner sind als der Gravitationsradius, dann kann ein äußerer Beobachter niemals verfolgen, wie das Teilchen auf den Zentralkörper fällt. Für ihn ist die Geschichte des Teilchens dann beendet, wenn es den Gravitationsradius unterschreitet und verschwindet. Solch merkwürdiges Verhalten tritt auf infolge der Rotverschiebung. Das sich auf seiner Trajektorie, der Spirale, bewegende Teilchen gerät in stärker und stärker werdende Gravitationsfelder, und das Spektrum seiner Strahlung wird sich nach der roten Seite verschieben, bis es völlig verlöscht. Formal geschieht dies in dem Moment, wenn das Teilchen den Gravitationsradius erreicht hat, wozu es vom Standpunkt eines äußeren Beobachters aus einer unendlichen Zeit bedarf.

Das Teilchen fällt so lange infolge der Einwirkung des Gravitationsfeldes, das auch den Gang der Uhren verlangsamt. Der äußere Beobachter jedoch verfolgt den Fall des Teilchens praktisch für eine endliche und auch nicht allzu lange Zeit. Wenn sich die Wellenlänge einer Strahlung, durch welche der Beobachter das Teilchen verfolgt, um das Mehrfache geändert hat, dann verschwindet es praktisch aus den Gesichtsfeld, weil die Intensität seiner Strahlung zu klein geworden ist.

In der Stoßmechanik existiert eine geeignete Größe, die als Stoßparameter ρ_0 bezeichnet wird. So wird der Abstand bezeichnet, in dem ein Körper am Kraftzentrum vorbeifliegen würde, falls es keine Wechselwirkung gäbe und seine Trajektorie eine gerade Linie wäre. Das Ergebnis her Berechnung der Planetenbahnen nach der genauen Gravitationstheorie ist folgendes: falls der Planet (richtiger müsste man von Komet oder Punktmasse sprechen) seine Bewegung im Unendlichen mit einer kleinen Geschwindigkeit v_0 beginnt und sein Stoßparameter kleiner ist als $2\ R_{Gr}\ c/v_0$ (d.h. wenn der Drehimpuls $L = m\ v_0\ \rho_0 < 2\ m\ c\ R_{Gr}$), dann gerät er letzten Endes in die Schwarzschildsche Sphäre. Falls

v_0 gleich der Lichtgeschwindigkeit ist (wenn man beispielsweise anstelle eines Kometen einen Lichtstrahl betrachtet), dann geschieht dasselbe, nur ist dann der kritische Wert des Stoßparameters etwas größer und beträgt $3 \cdot \sqrt{3}R_{Gr}$. Es zeigt sich, daß sich der Zentralkörper infolge der Änderung des Anziehungsgesetzes nicht wie ein Punkt verhält, sondern wie eine Sphäre endlicher Abmessungen, deren effektiver Radius für Teilchen unterschiedlicher Geschwindigkeit verschieden ist.

30 Was erblickt der fallende Beobachter?

Ein Teilchen, das in das Gravitationsfeld eines solchen Loches gerät und sich eine gewisse Zeit auf einer sich verengenden Spirale bewegt, wird formal vom Standpunkt eines vom Loch weit entfernten Beobachters aus allmählich immer röter und dunkler und verliert sich danach aus dem Gesichtsfeld.

Lange Zeit dachte man, dass im Abstand eines Gravitationsradius vom Zentrum im Raum etwas Ungewöhnliches vor sich geht, dass eine gewisse Schwarzschildsche Sphäre existiert (mit einem Radius gleich dem Gravitationsradius), welche in undurchdringlicher Form den gesamten Raum aufteilt. Man versuchte zu klären, was mit einem Beobachter geschieht, der in die Schwarzschildsche Sphäre fällt: prallt er gegen irgendetwas oder nicht?

Es zeigte sich, dass mit einem solchen Beobachter in diesem Sinne nichts Besonderes passiert. Auf seinem Weg fühlt er keinerlei Sphäre, und nach seiner Uhr bewegt er sich in einer endlichen Zeit zum Zentrum. Falls seine Geschwindigkeit genau radial war, dann wird er nicht einmal eine Spirale beschreiben.

Mit einem solchen Beobachter werden viel ernstere Ereignisse vor sich gehen, welche eine solche Reise unmöglich machen. In erster Linie erzeugen die Gravitationsfelder mächtige Gezeitenkräfte, welche ihn in radialer Richtung ausdehnen und senkrecht dazu zusammendrücken. Falls er aber unversehrt bliebe, dann würde er sonderbare Dinge wahrnehmen, wenn er auf die Welt zurückblickt, die er verlässt. In dem Maße, wie sich die Beschleunigung des Beobachters vergrößert, beginnt das Licht, das er früher aus allen Richtungen wahrnahm, zu verblassen. Hell bleibt einzig und allein ein Konus in seinem Rücken, in dem sich wie in einem optischen Gerät die gekrümmten Lichtstrahlen konzentrieren, welche die Information über die von ihm verlassene Welt übertragen. Dieser Kanus wird sich immer stärker zusammenziehen und verschwindet völlig, wenn der Beobachter das Zentrum erreicht hat. Dem Beobachter erscheint ein „Horizont“, der, sich allmählich zusammenziehend, ihn von der äußeren Welt isoliert. In der Welt des fallenden Beobachters fallen alle Körper und das Licht ins Zentrum, um ihn herum gibt es nichts, was nach außen fliegt. Fern an seinem Himmel lässt er hinter dem Horizont (der Schwarzschildschen Sphäre) seine alte Welt zurück.

Den Beobachter erwartet noch etwas Unangenehmes. Er hat keine Möglichkeit, über sich irgendeine Nachricht zurückzuschicken, weil nicht ein einziger Lichtstrahl aus der Schwarzschildschen Sphäre nach außen gelangen kann. Obwohl sich also an den Stellen, wo die Schwarzschildsche Sphäre verläuft, keine undurchlässige Wand befindet, bedeutet das Eindringen in diese Sphäre für den fallenden Beobachter ein irreversibles Verschwinden.

Über seine Existenz kann er fernerhin mit keinerlei Methoden mehr berichten. Die Geometrie an diesem Ort erweist sich auch als sehr kompliziert. Nicht alle Teile des Raums erweisen sich als miteinander verbunden, und der ruhende Beobachter muss wissen, dass hinter seiner Unendlichkeit eine ganze Welt liegt, die ebenfalls unendlich ist, aber nur vom Standpunkt des fallenden Beobachters aus. Jeder Beobachter erblickt seine eigene Welt, aber sie können sich miteinander darüber nicht unterhalten.

Im Sonnensystem geschieht nichts dergleichen. Der Gravitationsradius der Sonne ist sehr klein im Vergleich zu ihrem Radius, die Schwarzschildsche Sphäre befindet sich tief in ihrem Innern. Aber all das gewinnt aktuelle Bedeutung für schwarze Löcher, falls sie existieren.

31 Gibt es schwarze Löcher?

Niemand weiß, ob ein schwarzes Loch entdeckt werden kann, wenn es sich irgendwo in völliger Einsamkeit befindet. Aber einige von ihnen können sich als Bestandteil von Doppelsternen erweisen und einen leuchtenden Partner besitzen. Man muss nur wissen, wodurch sich ein solcher Stern zu erkennen gibt. Seldowitsch und Guseinow machten den ersten Versuch, einen Doppelstern mit einem schwarzen Loch zu finden, wobei sie dafür zwei Kriterien verwendeten.

Erstens muss ein solcher Stern eine Quelle von Röntgenstrahlung sein. Die stoffliche Materie, die von der leuchtenden Komponente und aus dem interstellaren Raum auf die dunkle Komponente des Doppelsterns fällt, wird mächtige Gravitationsfelder durchlaufen. Die Abbremsung in diesen Feldern erzeugt die Röntgenstrahlung. Ein solches Kriterium ist gut, gibt aber keine eindeutige Antwort: Röntgenstrahlen können auch von einem Pulsar oder von einem weißen Zwerg stammen.

Das bedeutet, dass zweitens aus allen Röntgen-Doppelsternen jene ausgewählt werden müssen, bei denen das vermutete schwarze Loch eine große Masse besitzt. Die Astronomen können die Masse bestimmen, wenn auch nicht sehr genau, aber doch so, dass man diesen Weg beschreiten kann.

Es zeigte sich, dass es nicht leicht ist, beiden Anforderungen zu genügen. Massive erloschene Sterne wurden nicht sehr viele registriert, und eine lange Liste von Doppelsternen, Kandidaten für schwarze Löcher, entfiel.

Heute kann man nur bei einem Stern davon sprechen, dass es sich um ein schwarzes Loch handeln könnte. Das ist der Doppelstern Cygnus X-1 im Sternbild des Schwans. wie auch bei anderen Doppelsternen oszillieren die Linien seines Spektrums, einmal vergrößert, dann verringert sich die Wellenlänge, woraus ersichtlich ist (über den Dopplereffekt), dass sich der leuchtende Stern um den Schwerpunkt eines Paares bewegt und sich dabei periodisch uns nähert und von uns entfernt. Falls die zweite Komponente des Doppelsterns auch leuchten würde, dann würde der Beobachter eine Aufspaltung in zwei Linien bemerken, die mit einer Phasendifferenz von π oszillieren (wenn sich der eine Stern nähert, entfernt sich der andere). Im Spektrum von Cyg X-1 ist nur eine einzige Linie sichtbar. Die Masse der Dunkelkomponente wird von den Astronomen auf mindestens 4 Sonnenmassen geschätzt. Es gibt noch 2 bis 3 Doppelsterne, deren Dunkelkomponenten etwas mehr als Sonnenmasse besitzen, aber diese Abschätzungen können sich noch ändern.

Somit kann heute nur ein Stern im Sternbild des Schwans Anspruch darauf erheben, ein schwarzes Loch zu sein. Aber auch das ist nicht wenig. Falls schwarze Löcher existieren, dann muss es eine große Menge verschiedener Masse und Abmessung geben, es ist jedoch schwierig, sie aufzufinden. Und falls sich Cyg X-1 tatsächlich als schwarzes Loch erweist, dann haben wir wirklich viel Glück gehabt, denn noch vor kurzer Zeit schien es, als ob es überhaupt unmöglich sei, schwarze Löcher zu entdecken.

32 Die Masse eines schwarzen Loches

Aus dem, was kurz über das Schicksal von Sternen erzählt wurde, blieb unklar, warum im weißen Zwerg und im Neutronenstern die Kontraktion aufhörte, in massiveren Sternen aber nicht. Vielleicht können Neutronen, die dichter gepackt sind, die Kontraktion zum Stillstand bringen? Falls eine solche Frage einem Physiker des vorigen Jahrhunderts gestellt worden wäre, dann hätte er nichts darauf antworten können. Im Arsenal der klassischen Physik existieren keinerlei Kräfte, die eine Kontraktion hätten zum Stillstand bringen können. Heute ersehen wir das daraus, dass die Formeln für den Radius kontrahierender Sterne entweder $\hbar$ oder c oder beide Konstanten gleichzeitig enthalten.

Der Kontraktions-Stillstand eines weißen Zwergs und eines Neutronensterns ist ein Quanteneffekt und mit dem Pauli-Prinzip verbunden, welches zwei Elektronen verbietet, sich in ein und demselben Zustand zu befinden. Dieses Prinzip verbietet den Elektronen, auf eine kernnähere Schale überzugehen, falls diese Schale schon besetzt ist.

Im Stern bilden die von den Atomen abgelösten Elektronen eine Art Gas. Dieses Gas unterliegt im Gegensatz zu einem idealen Gas fast keiner Kontraktion, es ist, wie man sagt, entartet. Nach dem Pauli-Prinzip können sich im Volumen $dV=dx\,dy\,dz$ nur zwei Elektronen befinden, falls ihre Impulskomponenten dp_x, dp_y, dp_z sich um nicht mehr als $dx/\hbar$, $dy/\hbar$, $dz/\hbar$ unterscheiden. Betrachten wir, wie das in der Mechanik getan wird, einen 6-dimensionalen Phasenraum, d.h. einen Raum, in dem ein Punkt durch 3 Koordinaten x, y, z und durch 3 Impulskomponenten gegeben ist. In diesem Raum werden der Zustand jedes Teilchens, d.h. seine Koordinaten und sein Impuls, durch einen Punkt gegeben und die Zustände aller Teilchen durch eine Punktmenge. Demgemäß fordert das Pauli-Prinzip, dass auf je 2 Elektronen (2 auf Grund der beiden möglichen Spinorientierungen) ein Volumen von mindestens $\hbar^3$ entfällt. Dasselbe ergibt sich aus der Unbestimmtheitsrelation:

$$\Delta p_x \Delta x \gtrsim \hbar, \qquad \Delta p_y \Delta y \gtrsim \hbar, \qquad \Delta p_z \Delta z \gtrsim \hbar\,.$$

Aus dem Gesagten wird verständlich, dass mit der Verringerung des Volumens des Systems der Druck stark anwachsen muss, wenn die Temperatur auch noch so niedrig ist. Somit besitzt sogar ein kaltes Elektronengas einen hohen Druck, während für ein ideales Gas $pV=0$ wird bei $T=0$. Und dieser Druck des entarteten Gases bringt die Kontraktion des Sterns zum Stillstand.

Aber den Sternen bleibt trotzdem ein „Ausweg“, falls der Druck zu hoch wird. Bei sehr hohem Druck werden die Elektronen von den Protonen eingefangen, es läuft ein umgekehrter Betazerfall ab. Das Elektronengas verwandelt sich in ein Neutronengas, dessen Dichte milliardenmal größer sein kann als die Dichte des Elektronengases. Der Radius eines solchen Sterns kann sich um einige tausendmal verringern. Erneut tritt ein Gleichgewicht auf. Aber man darf nicht annehmen, dass sich das nun so fortsetzt. In der Natur werden Ähnlichkeiten immer gestört.

Falls sich die Masse des Sterns weiter erhöht, dann wächst der Impuls der Neutronen so stark, dass sich Teilchengeschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit ergeben. Wenn aber die Geschwindigkeit wächst, dann auch die Masse. Der Druck des Gases erweist sich von derselben Größenordnung wie auch die Energiedichte. Das führt seinerseits dazu, dass sich das Gravitationsfeld erheblich verstärkt, und die Kontraktion des Sterns wird nicht kompensiert, sondern beschleunigt. Das ist Ausdruck des nichtlinearen Charakters der Gravitationsgleichungen, worüber wir schon sprachen: das Gravitationsfeld verstärkt sich selbst. Daraus folgt auch die Instabilität.

Man kann versuchen, ganz grob die Masse eines schwarzen Loches abzuschätzen. Zunächst muss sein Radius R gleich seinem Gravitationsradius sein:

$$R = 2\,\gamma\,\frac{M}{c^2} = R_{GrS}\frac{M}{M_S}\,.$$

Wir drücken die Masse durch die Dichte aus:

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho = M_S\left(\frac{R}{R_S}\right)^3\frac{\rho}{\rho_S}\,.$$

Zur Vereinfachung wurde in die Formel der Gravitationsradius der Sonne R_{GrS}, ihr Radius R_S, ihre Masse und ihre Dichte ρ_S eingeführt. Aus diesen zwei Formeln folgt:

$$M^2 = \frac{\rho_S}{\rho}\left(\frac{R_S}{R_{GrS}}\right)^3 M_S^2\,.$$

Setzen wir ρ_S = 1,4 g/cm^3, R_{GrS} = 3 km, $R_S = 7\cdot 10^{+5}$ km ein und verwenden für die Dichte die doppelte Kerndichte (ca. 10^{15} g/cm^3), dann ergibt sich:

$$M \approx 3\,M_S\,.$$

Das ist natürlich eine sehr grobe Abschätzung, weil wir die relativistische Massenzunahme nur als Verdopplung der Dichte berücksichtigt haben. Aber auch eine genauere Berechnung ergibt für die maximale Masse eines Neutronensterns einen Wert von 2 bis 5 Sonnenmassen (es sei bemerkt, dass eine solche Abschätzung vom Modell des Sterns abhängig ist). Es ist interessant, dass die Masse der Sonne sehr nahe an der gefährlichen Grenze liegt, aber auf alle Fälle niedriger als diese. Die Sonne erwartet das Schicksal eines weißen Zwergs.

Die von uns durchgeführte Abschätzung muss vorsichtig verwendet werden. Man kann nicht ausschließen, dass sich ein massiver Stern bei der Kontraktion so sehr aufheizt, dass er nicht abkühlen kann. Dann erfolgt die Explosion einer Novae. Welche Überbleibsel nach der Explosion vorkommen und ob diese für ein schwarzes Loch ausreichen, das kann wahrscheinlich niemand voraussagen.

33 Rotierende schwarze Löcher

Das schwarze Loch, welches wir beschrieben haben, existiert für einen äußeren Beobachter praktisch nicht, oder richtiger gesagt, man kann es nicht sehen. Der Stern ist aber von einem Gravitationsfeld umgeben, weil er Masse besitzt und das Schwerefeld in keiner Weise abgeschirmt werden kann. Das bedeutet, dass außerhalb des Sterns ein statisches Gravitationsfeld wie bei einem ruhenden Körper existieren wird, was auch im Innern des Sterns vor sich gehen mag.

Das schwarze Loch kann aber möglicherweise noch einen Drehimpuls haben. Es ist günstig, diesen Drehimpuls auf die Masse des Sterns zu normieren und so eine Größe *a* der Dimension einer Länge einzuführen:

$$a = \frac{L}{Mc}.$$

Die Theorie zeigt, dass *a* nicht größer sein kann als der Gravitationsradius des Sterns, d.h. der maximale Drehimpuls, den ein Stern haben kann beträgt

$$L = M\ c\ R_{Gr}\ .$$

Ein rotierendes schwarzes Loch unterscheidet sich stark von einem ruhenden. Es hat auch seinen Horizont, seine Sphäre, aus der nichts nach außen gelangen kann, aber eine solche Schwarzschildsche Sphäre ist kleiner als die eines nicht rotierenden Sterns. Ihr Radius beträgt

$$R = \frac{R_{Gr}}{2} + \sqrt{\frac{R_{Gr}^3}{4} - a^2}\ .$$

Die Verringerung des Radius erfolgt aus demselben Grunde, aus dem sich das Gewicht eines Körpers am Erdäquator verringert.

Wenn ein Körper auf einen rotierenden Stern fällt, dann erfolgt dieser Fall so wie im Falle eines ruhenden Sterns, jedoch nur, solange sich der Körper am Äquator nicht bis auf den Abstand eines Gravitationsradius genähert hat (oder auf einen geringeren Abstand bei höheren Breiten). Von diesem Augenblick an dringt der Körper in die Ergosphäre des schwarzen Loches ein, und nichts kann nun seinen Fall aufhalten. Er beginnt zusammen mit dem schwarzen Loch zu rotieren und fällt auf einer Spirale hinter den Horizont.

Das Auftreten einer Ergosphäre des schwarzen Lochs macht das ganze System interessanter. Ein solches Loch kann fallende Körper beschleunigen. Falls ein Körper, der in die Ergosphäre gerät, in zwei Stücke zerbricht, dann kann eines von ihnen, das ins schwarze Loch hineinstürzt, seine Energie dem zweiten Bruchstück abgeben, welches dann wie aus einer Kanone geschossen nach außen fliegt. Falls sie existieren, arbeiten solche schwarzen Löcher als Müllschlucker des Weltalls, sie geben einen Teil der Energie in Form beschleunigter Teilchen zurück. Diese Eigenschaft rotierender schwarzer Löcher weist möglicherweise auf ihre Rolle im Weltall hin.

34 Andere schwarze Löcher

Die schwarzen Löcher stellen als Mumien erloschener Sterne trotz allem kleine Objekte dar. Selbst wenn die stoffliche Materie, die in schwarze Löcher strömt, dabei Energie freisetzt, ist diese Energie kaum von Bedeutung für die allgemeine Entwicklung des Weltalls. Falls sich eine solche Erscheinung wie der Fall von Sternen in ihr eigenes Innere in der Natur realisiert, dann scheint es natürlich zu sein, dass dies in unterschiedlichen Maßstäben vor sich geht.

Man kann sich vorstellen, dass sich eine Masse stofflicher Materie, die um das millionen- oder milliardenfache die Sonnenmasse übersteigt, infolge von Gravitationskräften zusammenzieht. Ein solcher schwarzer „Abgrund“ wird eine gewaltige Stoffmenge aufsaugen. In der Nähe eines solchen

Abgrunds werden die Gravitationsfelder so stark und inhomogen, dass sie Sterne zerreißen. Die Kräfte, die auf der Erde die verhältnismäßig harmlose Ebbe und Flut hervorrufen, werden hier eine katastrophale Zerstörung vollbringen. Solche Katastrophen können wohl kaum unbemerkt bleiben, trotzdem hat sie noch niemand beobachtet.

Im Weltall gibt es andererseits geheimnisvolle Objekte, deren Natur wir nicht verstehen können. Das sind vor allem die Quasare, sternähnliche Objekte, deren Abmessungen die eines großen Sterns nicht überschreiten, die aber eine solche Energie freisetzen wie eine ganze Galaxis. Man hat keinerlei vernünftige Erklärung für die Energiequelle von Quasaren. Vielleicht hilft hier der schwarze Abgrund? Im Zentrum einer Galaxis, in ihrem Kern, laufen stürmische Prozesse ab, die dem Beobachter durch Dunkelwolken verborgen sind. Vielleicht existieren auch im Kern der Galaxien schwarze Abgründe und erzeugen Energie? Die Vorstellung, dass eine Galaxis Energie von in den schwarzen Abgründen sterbenden Sternen erhält, ist sehr beeindruckend. In dieser Frage ist jedoch Skeptizismus angebrachter denn je. Wahrscheinlich vereinfacht eine solche Beschreibung der Ereignisse die wirklich ablaufenden Vorgänge zu stark.

35 Elementarteilchen

Zu den zwei Kenngrößen schwarzer Löcher, der Masse und dem Drehimpuls, kann noch eine dritte hinzukommen: die elektrische Ladung. Man kann unmöglich an der Tatsache vorübergehen, dass Elementarteilchen durch analoge Größen charakterisiert werden: durch die Masse, den Spin und die Ladung. Aus dieser sonderbaren Koinzidenz wurde vielfach versucht, nützliche Schlussfolgerungen zu ziehen. Die Elementarteilchen haben aber ebenso wie das Weltall noch ihre Geheimnisse. So kann man nicht verstehen, warum geladene Teilchen nicht in Bruchstücke auseinanderfliegen. Nach allen Berechnungen müssten sie auseinanderfliegen, weil die verschiedenen Teile der Ladung sich gegenseitig abstoßen (gibt es aber bei Elementarteilchen Teile?).

Einer der möglichen Gründe sind die Gravitationskräfte, die bei kleinen Abständen ins Spiel kommen. Am einfachsten wäre ein Modell, in den die Masse des Teilchens so groß ist, dass die Anziehung im Inneren vollständig die elektrische Abstoßung kompensiert. Dafür müsste offensichtlich folgende Beziehung erfüllt sein:

$$\gamma\, m^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}.$$

Das bedeutet, dass die Masse eines solchen Teilchens, das „Friedmon“ genannt wurde,

$$m = \frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0\gamma}} \approx 2\cdot 10^{-6}\, g$$

betragen müsste. Ein solcher Wert ist ziemlich groß für ein Elementarteilchen. Aber vielleicht spielt es doch irgendwo eine Rolle!?

Ende